

## CAPITULO PRIMERO

### LAS FIGURAS GEOMETRICAS MAS SIMPLES

#### I. Longitudes, áreas y volúmenes como magnitudes relativas

Siguiendo fielmente el plan que desde un principio nos hemos trazado, estudiaremos juntas las magnitudes que corresponden a la recta, en el plano y en el espacio. Simultáneamente y de acuerdo con la tendencia fusionista ya indicada en la introducción, haremos uso del cálculo utilizando las *coordenadas cartesianas rectangulares*.

Consideremos en primer lugar un *segmento* que imaginamos colocado sobre el eje  $x$ . Si las abscisas de sus extremos son  $x_1$  y  $x_2$ , la *longitud* del segmento será  $x_1 - x_2$ , lo cual puede escribirse en forma de determinante de esta manera :

$$(1,2) = x_1 - x_2 = \frac{1}{1} \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Análogamente, el *área de un triángulo* del plano  $xy$  cuyos vértices 1, 2, 3, tengan por coordenadas  $x_1, y_1$ ;  $x_2, y_2$ ;  $x_3, y_3$ , respectivamente, puede expresarse así :

$$(1,2,3) = \frac{1}{1.2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

y por último, el *volumen de un tetraedro* de vértices 1( $x_1, y_1, z_1$ )..., 4( $x_4, y_4, z_4$ ), tiene la siguiente expresión :

$$(1,2,3,4) = \frac{1}{1.2.3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Comúnmente se considera que tanto una longitud, como un área o volumen, son iguales al *valor absoluto* de la magnitud considerada. En nuestras fórmulas, por el contrario, al desarrollar la matriz aparece un *determinado signo*, que depende del orden de sucesión en que se hayan dado los vértices. Siguiendo nuestros principios, busquemos la *interpretación geométrica de este signo*, que nos dan las fórmulas analíticas.

Para ello es de importancia la elección del *sistema de coordenadas rectangulares*, y estableceremos de una vez para siempre el siguiente convenio: En el caso de *una dimensión*, consideraremos como positiva la parte del eje  $x$  dirigida hacia la derecha. En el *plano* llamaremos semiejes  $x$  e  $y$  positivos a los dirigidos hacia la derecha y hacia arriba, respectivamente; si se hiciese que

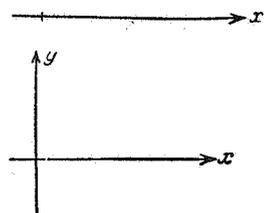


Figura 1

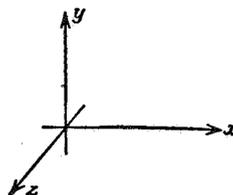


Figura 2

la parte positiva del eje  $y$  fuese la dirigida hacia abajo, el sistema de coordenadas sería totalmente distinto que el de antes; sería su simétrico y no podrían superponerse por un simple movimiento en el plano, es decir, sin salir al espacio (fig. 1), y en cuanto al espacio nos basta agregar al sistema de ejes del plano uno más, el eje  $z$  dirigido hacia adelante (fig. 2); la elección del sentido opuesto da origen a otro sistema de coordenadas, que no puede superponerse al anterior por ningún movimiento en el espacio (\*).

Una vez hecho este convenio arbitrario, si nos mantenemos fieles a él, encontraremos la *significación geométrica del signo anteriormente obtenido en propiedades muy sencillas que dependen del orden de sucesión atribuido a los puntos*.

(\*) Se distinguen uno de otro estos dos sistemas por los calificativos de «dextrógiro» o «directo» y «levógiro» o «retrógrado», correspondiente a la posición de los tres primeros dedos en la mano derecha y en la izquierda. (T. I.)

Para el segmento (1, 2), esta propiedad es casi evidente y puede enunciarse así: *La expresión  $x_1 - x_2$  de la longitud es positiva o negativa según que el punto 1 esté a la derecha o a la izquierda del punto 2.*

Para el área del triángulo, la fórmula da valor positivo o negativo, según que, al recorrer el contorno en el orden 1, 2, 3, el sentido de este movimiento sea opuesto o igual al del movimiento de las agujas de un reloj. Vamos a demostrar esto partiendo de un caso particular sencillo, y pasando después al caso general, con el auxilio de una consideración de continuidad.

Consideremos el triángulo (fig. 3), que tiene como primer vértice el punto del eje  $x$ , cuya abscisa es la unidad ( $x_1=1, y_1=0$ );

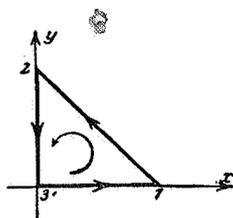


Figura 3

como segundo el punto del eje  $y$  de ordenada igual a uno ( $x_2=0, y_2=1$ ), y como el tercero, el origen de coordenadas ( $x_3=0, y_3=0$ ). Según el convenio hecho acerca del sistema de coordenadas, el sentido 1, 2, 3, en que se recorre el triángulo, es contrario al del movimiento de las agujas de un reloj, y la fórmula da para el área el valor positivo:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = + \frac{1}{2}$$

Podemos ahora hacer, mediante deformación continua de este triángulo, que sus vértices coincidan con los de otro triángulo cualquiera *del mismo sentido*, sin que los tres vértices móviles estén en ningún momento en línea recta. En esta deformación, el determinante varía también de un modo continuo; y como es evidente que sólo se anularía en el caso en que los tres puntos estuviesen en línea recta, resulta que se conserva constan-

temente positivo, y con ello queda demostrado que el área de cualquier triángulo de sentido contrario al de las agujas de un reloj es positiva.

Permutando dos vértices del primer triángulo, obtenemos otro, cuyos vértices 1, 2, 3 están ordenados en el mismo sentido en que se mueven las agujas de un reloj, y se ve inmediatamente que la fórmula da un área negativa para todos los triángulos de este sentido.

En el caso del tetraedro, la demostración es análoga. Elijamos, por razón de comodidad, el tetraedro representado en la figura 4, cuyos vértices son los tres extremos de segmentos iguales a la unidad colocados sobre los ejes y el origen de coordenadas. El volumen tendrá entonces la siguiente expresión :

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = + \frac{1}{6}$$

de donde se sigue, como antes, que todo tetraedro deducido de éste, por medio de una deformación continua de tal modo que los cuatro vértices no estén nunca en un plano (es decir,

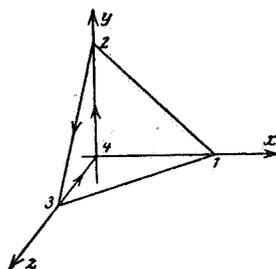


Figura 4

que el determinante no se anule), tendrá también volumen positivo. Ahora bien ; todos estos tetraedros se pueden caracterizar por el sentido en que se ve recorrer la cara (2, 3, 4) desde el vértice 1, con lo cual podemos expresar el resultado de este modo : *Un tetraedro (1, 2, 3, 4) tiene volumen positivo si, mirando desde el vértice 1 los 2, 3, 4, aparecen éstos ordenados*

en sentido opuesto al del movimiento de las agujas de un reloj. En el caso contrario, el volumen es negativo.

De las fórmulas analíticas, hemos obtenido así las reglas geométricas que permiten asignar a todo segmento, triángulo o tetraedro un signo determinado, una vez fijado el orden de sucesión en que se supongan los vértices. Este modo de proceder presenta grandes ventajas frente al de la Geometría elemental ordinaria, que considera las longitudes, áreas y volúmenes como magnitudes absolutas. Para hacerlo ver vamos a estudiar algu-

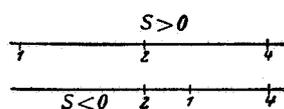


Figura 5

nos teoremas sencillos, que, exigiendo en la Geometría elemental la consideración de numerosos casos particulares, toman aquí un carácter general.

Comencemos por un ejemplo sencillo: la *razón simple* de tres puntos de una recta, por ejemplo, el eje  $x$ . Designemos los puntos, por motivos de comodidad que se comprenderán después, con los números 1, 2 y 4 (fig. 5); la razón simple es

$$S = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4}$$

Es evidente que  $S$  es positiva o negativa según que el punto 1 esté fuera o dentro del segmento (2, 4). Si, como generalmente se hace, se considera sólo el valor absoluto  $|S| = \frac{|x_1 - x_2|}{|x_1 - x_4|}$  es preciso referirse a una figura determinada, o bien decir expresamente el orden en que los puntos están colocados, lo que, naturalmente, es muy incómodo. La consideración del signo evita este inconveniente, pues así la fórmula comprende todas las posibilidades de ordenación de los puntos.

Tomemos ahora otro punto, que designaremos con el número 3, y formemos la *razón doble* o anarmónica de los cuatro puntos

$$D = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_4} : \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_4} = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}$$

Se ve inmediatamente que  $D$  es menor que cero cuando los puntos 1 y 3 están separados por los 2 y 4 (fig. 6), y mayor que cero en el caso contrario, es decir, cuando los puntos 1 y 3 están ambos fuera o ambos dentro del segmento (2, 4) (fig. 7). Existen, pues, dos maneras de ordenar los puntos que dan para  $D$  el mismo valor absoluto, de modo que, cuando se da solamente éste, es preciso agregar a cuál de las dos maneras nos referimos. Por ejem-

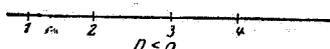


Figura 6

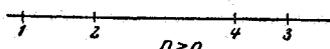


Figura 7

plo, si se define la cuaterna armónica por la condición  $|D|=1$ , como desgraciadamente suele hacerse, es necesario además agregar la condición de que los dos puntos de un par han de estar separados por los otros dos. En cambio, a nosotros nos basta una condición, la  $D = -1$ .

La consideración del signo tiene una gran importancia en la Geometría proyectiva, a causa del preponderante papel que en ella desempeña la razón doble. Un conocido teorema dice que si cuatro puntos de una recta se proyectan desde un centro arbitrario sobre otra recta cualquiera (fig. 8), todas las cuaternas

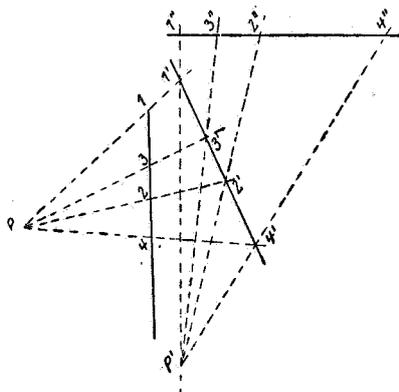


Figura 8

así obtenidas tienen la misma razón doble. Si tenemos en cuenta el signo de ésta, podemos enunciar el siguiente teorema recíproco, completamente general: Si dos cuaternas de puntos situadas sobre rectas distintas tienen la misma razón doble, podrán obte-

nerse una de otra por una proyección o por una sucesión de proyecciones. Por ejemplo, en la figura 8 las cuaternas 1, 2, 3, 4 y 1'', 2'', 3'', 4'' se obtienen una de otra por proyección desde los centros  $P$  y  $P'$ . Si se conociera solamente el valor absoluto de  $D$ , el enunciado de este teorema no sería tan sencillo, puesto que habría que hacer distinciones acerca de la colocación de los puntos.

La consideración del signo en las fórmulas del triángulo tiene también un gran interés. Sea  $O$  un punto cualquiera (figura 9) en el interior de un triángulo (1, 2, 3); uniéndolo con los tres vértices, la suma de los valores absolutos de las áreas de

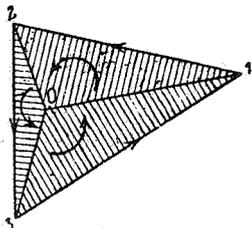


Figura 9

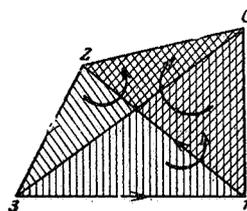


Figura 10

los tres triángulos resultantes es igual al área total del triángulo primitivo,

$$|(1, 2, 3)| = |(0, 2, 3)| + |(0, 3, 1)| + |(0, 1, 2)|$$

En la figura los vértices 1, 2 y 3 están dispuestos en el sentido que hemos llamado positivo, es decir, contrario al del movimiento de las agujas de un reloj; luego, según nuestro convenio, el área será también positiva, y será válida la fórmula

$$(1, 2, 3) = (0, 2, 3) + (0, 3, 1) + (0, 1, 2)$$

Pero esta fórmula es también válida cuando el punto  $O$  está fuera del triángulo, y, en general, cualquiera que sea la posición, en el plano, de los puntos  $O, 1, 2, 3$ . En efecto, si tomamos como ejemplo la posición de los puntos en la figura 10, donde  $(0, 1, 2)$  es del mismo sentido que el movimiento de las agujas de un reloj y  $(0, 2, 3)$  y  $(0, 3, 1)$  son de sentidos contrarios; considerando los valores absolutos la fórmula resultante sería

$$|(1, 2, 3)| = |(0, 2, 3)| + |(0, 3, 1)| - |(0, 1, 2)|$$

igualdad confirmada por la figura.

Para demostrar la generalidad de la fórmula nos valdremos de la definición *analítica* del área, utilizando una conocida propiedad de los determinantes. Tomando el punto 0 como origen de coordenadas y prescindiendo del factor  $\frac{1}{2}$ , vemos que, cualquiera que sean los valores de  $x_1, \dots, y_3$ , se verifica :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

El valor de los determinantes del segundo miembro no se altera substituyendo en ellos el segundo y tercer 1 de la última columna, por ceros, puesto que, al desarrollar por los elementos de la primera fila, aquellos unos sólo intervienen en los determinantes menores que se han de multiplicar por los ceros de la primera fila; si además permutamos cíclicamente las filas de los dos últimos determinantes, cosa lícita en todo determinante de orden impar, la igualdad anterior puede ponerse en la siguiente forma :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y basta desarrollar el determinante del primer miembro por los elementos de la última columna para convencerse de que esto es una identidad, con lo cual queda demostrado el teorema para todas las posiciones posibles de los cuatro puntos.

Todavía puede generalizarse esta fórmula para *el área de un polígono cualquiera*. Supongamos (fig. 11) que queremos medir la extensión de un terreno poligonal habiéndose medido previamente las coordenadas de los vértices 1, 2, ...,  $n$ . Si el que opera no tiene costumbre de dar signo a las áreas, necesitará hacer un croquis del terreno y descomponer el polígono dibujado en triángulos y atender a la forma especial de cada uno (en particular, según que los ángulos sean agudos u obtusos) para en cada caso sumarle o restarle de los demás. En cambio, nosotros,

después de lo dicho acerca de las áreas como magnitudes relativas, podemos dar una fórmula que, mecánicamente, sin necesidad de mirar la figura, da inmediatamente el área del polígono: Si 0 es un punto cualquiera del plano, por ejemplo, el origen

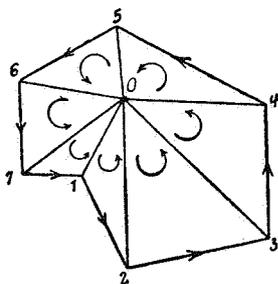


Figura 11

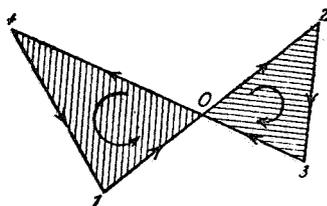


Figura 12

de coordenadas y los vértices se suceden en el orden 1, 2, ..., n, el área será

$$(1, 2, 3 \dots n) = (0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \dots + (0, n-1, n) + (0, n, 1)$$

donde hay que atribuir a cada triángulo el signo que corresponda al sentido indicado. La fórmula da para área un número con signo positivo o negativo, según que el sentido 1, 2, ..., n del polígono sea contrario o igual al del movimiento de las agujas de un reloj. La demostración, muy fácil, queda al cuidado del lector.

Veamos algunos casos particulares, que, ciertamente, no son de los que se pueden presentar en Topografía, a saber, los de áreas de polígonos cuyos contornos se cortan a sí mismos tales como el cuadrilátero de la figura 12. Cuando hablemos aquí de un área determinada, entenderemos que se trata del valor dado por esta fórmula, y vamos ahora a interpretarlo geoméricamente. Se ve desde luego que este valor es independiente de la posición del origen de coordenadas; supongamos, pues, para mayor comodidad, que este punto es el 0, de encuentro de los lados opuestos 12 y 34 del cuadrilátero, en cuyo caso los dos triángulos (0, 1, 2) y (0, 3, 4) son nulos y queda

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3) + (0, 4, 1)$$

El primer triángulo tiene un área negativa y el segundo po-

sitiva, luego el área del cuadrilátero (1, 2, 3, 4) en que dos lados opuestos se cortan será igual al valor absoluto del área del triángulo (0, 4, 1) recorrido en sentido positivo *disminuido* en el valor absoluto del área del triángulo (0, 2, 3) recorrido en sentido negativo.

Como segundo ejemplo, consideremos el *pentágono estrellado* (figura 13). Si tomamos el origen dentro del núcleo central, todos los triángulos parciales que figuran en la suma

$$(0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \dots + (0, 5, 1)$$

están recorridos en sentido positivo y la suma cubre una sola vez las puntas de la estrella y dos veces el pentágono simple interior.

Fijándonos en el sentido (1, 2, 3, 4, 5, 1) en que se recorre

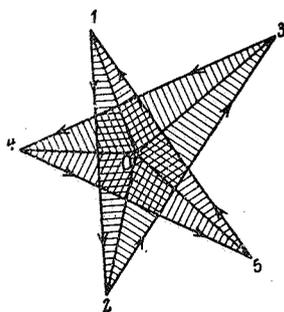


Figura 13

el polígono, vemos que cada porción está recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj, de tal manera, que se recorre dos veces la que al determinar el área se cuenta dos veces y se recorre una vez, la que en esta determinación se cuenta también una sola vez.

De la consideración de ambos ejemplos, podemos abstraer la siguiente *regla general*: Nuestra fórmula da como área de todo polígono rectilíneo, cualquiera que sea el número de puntos de cruces de sus lados, la suma algebraica de las áreas parciales limitadas por el contorno del polígono, contando cada porción tantas veces cuantas sea recorrida al recorrer el contorno (1, 2, 3, ..., n, 1) y atribuyéndole signo positivo o negativo, según que el sentido de su contorno sea contrario al de las agujas de un reloj, o sea este mismo.

El lector puede también reconocer la verdad de esta regla general, lo que no presenta ninguna dificultad, siendo muy conveniente que la aplique a muchos ejemplos para familiarizarse con ella.

Vamos, ahora, a ocuparnos de *recintos limitados por líneas curvas*. Tomemos una curva cerrada cualquiera (fig. 14) que puede cortarse a sí misma un número arbitrario de veces; su-

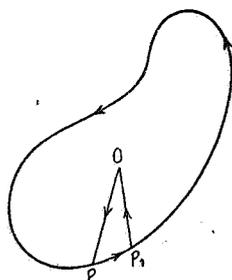


Figura 14

pongamos que se recorre en un sentido determinado y propongámonos hallar el área que limita.

El procedimiento natural es el de inscripción de polígonos de gran número de lados muy pequeños, y determinar el valor límite de sus áreas calculadas por la fórmula anterior. Sean  $P(x, y)$  y  $P_1(x+dx, y+dy)$  dos vértices consecutivos de uno de estos polígonos. El triángulo elemental  $O, P, P_1$ , tendrá por área

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

y el área del recinto curvilíneo será el límite de la suma de las áreas de todos estos triángulos elementales; luego, la integral curvilínea tomada a lo largo de la línea dada recorrida en el sentido prefijado:

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$$

puede servir de definición de dicha área.

La interpretación geométrica de esta definición, es análoga a la de la fórmula obtenida para los polígonos, a saber: 'Cada

porción de área limitada por una curva, será contada en esta integral como positiva, tantas veces como al recorrer el contorno en el sentido prefijado sea recorrida el suyo en sentido contrario al de las agujas de un reloj, y como negativa tantas veces como sea recorrido en el mismo sentido de éstas. Así en la figura 14, el área se cuenta una sola vez en sentido positivo. En la figura 15, la parte exterior se cuenta una vez como positiva, y la

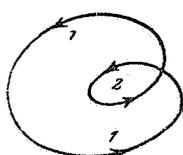


Figura 15

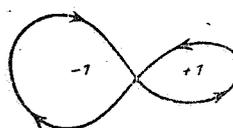


Figura 16

interior dos veces y también positiva. En la figura 16, la parte de la izquierda es negativa y la de la derecha positiva, contándose ambas una sola vez, y se obtiene para valor del área un número negativo.

En la figura 17, hay una parte con la que no hay que contar, por estar recorrida una vez en sentido positivo y después en sentido negativo. Naturalmente, pueden existir curvas que limiten un área nula, como por ejemplo, la de la figura 16, si la curva fuese simétrica respecto al punto común a sus dos partes. Ello no tendría nada de absurdo, porque esta determinación de áreas descansa sobre un convenio arbitrario.

Para hacer ver la utilidad de las precedentes consideraciones, vamos a estudiar el planímetro polar, de Amsler, aparato cons-

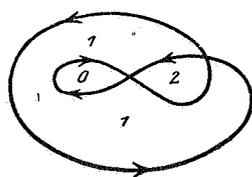


Figura 17

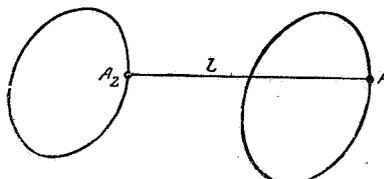


Figura 18

truído en 1848 por el mecánico de Schaffhausen, *Jakob Amsler*, y muy usado en la determinación práctica de áreas.

Comencemos por exponer el fundamento teórico de la construcción. Sea (fig. 18) una barra  $A_1A_2$  de longitud  $l$ , suscepti-

ble de moverse sobre el plano, de tal modo que los puntos  $A_1$  y  $A_2$  describan curvas cerradas y la barra vuelva a su posición primitiva. Propongámonos ahora, determinar el área de la superficie así cubierta, considerando las partes de esta superficie como positivas o negativas, según el sentido en que la barra las recorra.

Podemos descomponer el movimiento de la barra en una serie de movimientos elementales infinitamente pequeños, cada uno de los cuales representará el paso de una posición 1, 2 (figura 19) a otra próxima 1', 2'. La superficie total así descrita por la barra, será igual al límite de la suma algebraica de todos los «cuadriláteros elementales» (1, 1', 2', 2), descritos en estos movimientos elementales, suma en la cual cada cuadrilátero ten-

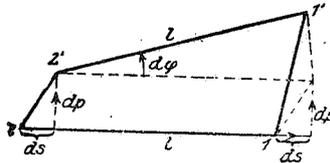


Figura 19

drá el signo que le corresponda según el sentido del movimiento de la barra correspondiente al 1, 1', 2', 2.

Cada uno de los movimientos elementales puede a su vez descomponerse en otros tres, a saber:

- 1.º Una traslación  $ds$  de la barra en la dirección de sí misma.
- 2.º Otra traslación  $dp$  normal a la anterior.
- 3.º Un giro de ángulo  $d\varphi$ , alrededor del extremo  $A_2$ .

Con estos movimientos la barra recorre las superficies  $0 \cdot ds$ ,  $l \cdot dp$  y  $\frac{l^2}{2} d\varphi$ , respectivamente.

El área del cuadrilátero elemental (1, 1', 2', 2), estará representada por la suma de estas tres superficies, porque el error que así se comete, es de un orden de pequeñez superior al de estas magnitudes, y en el paso al límite (que es un simple proceso de integración), se anula. Importa notar que esta suma

$$l \cdot dp + \frac{l^2}{2} \cdot d\varphi$$

también coincide en signo con el área del cuadrilátero (1, 1', 2', 2) si se toma como positivo  $\varphi$ , cuando su sentido sea contrario al del movimiento de las agujas de un reloj, y  $p$ , cuando la traslación  $dp$  tenga el mismo sentido que el de crecimiento del ángulo  $\varphi$ .

La totalidad de la superficie cubierta por la barra en su movimiento, se obtendrá por la integración :

$$J = l \int dp + \frac{l^2}{2} \int d\varphi;$$

en esta fórmula  $\int d\varphi$  representa el ángulo girado por la barra desde la posición inicial a la final, pero, como ambas posiciones coinciden, es  $\int d\varphi = 0$ , si la barra no ha girado un ángulo de  $2\pi$ , y la superficie recorrida es

$$J = l \int dp. \quad [1]$$

Puede ocurrir también, que en virtud de la forma de las trayectorias de  $A_1$  y  $A_2$ , la barra haya realizado uno o más giros completos. En este caso  $\int d\varphi$  ya no será cero, sino un múltiplo de  $2\pi$ , y al valor de  $J$  que hemos obtenido, habrá que agregar tantas veces  $+l^2\pi$  o  $-l^2\pi$ , como vueltas completas haya dado la barra en sentido positivo o negativo, respectivamente. Para evitar complicaciones, nos limitaremos al caso más sencillo, o sea, cuando  $\int d\varphi = 0$ .

También se puede calcular la superficie  $J$  por otro procedimiento. Supongamos que la barra (fig. 20), toma las posiciones sucesivas e infinitamente próximas 12, 1'2', 1''2'' ... El área  $J$  será igual a la suma de los cuadriláteros elementales así formados :

$$S = (1, 1', 2', 2) + (1', 1'', 2'', 2') + (1'', 1''', 2''', 2'') + \dots$$

o mejor dicho, a la integral, límite de dicha suma. Tomando ahora un origen  $O$  cualquiera de coordenadas, podemos aplicar

las fórmulas que obtuvimos para las figuras poligonales, con lo cual tendremos :

$$\begin{aligned}
 S = & (0, 1, 1') + (0, 1', 2') + (0, 2', 2) + (0, 2, 1) \\
 & + (0, 1', 1'') + (0, 1'', 2'') + (0, 2'', 2') + (0, 2', 1') \\
 & + (0, 1'', 1''') + (0, 1''', 2''') + (0, 2''', 2'') + (0, 2'', 1'') \\
 & + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

El segundo triángulo de cada fila, es igual y de sentido contrario al colocado en cuarto lugar en la fila siguiente :  
 $(0, 1', 2') = -(0, 2', 1')$ ,  $(0, 1'', 2'') = -(0, 2'', 1'')$ , etc. Además,

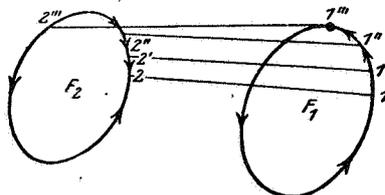


Figura 20

en la última fila, debe entrar el sumando  $(0, 1, 2)$  igual y de sentido contrario al  $(0, 2, 1)$ , de la primera. Suprimiendo todos estos términos, quedan solamente el primero y tercer sumando de cada fila, o sea :

$$\begin{aligned}
 J = & (0, 1, 1') + (0, 2', 2) \\
 & + (0, 1', 1'') + (0, 2'', 2') \\
 & + (0, 1'', 1''') + (0, 2''', 2'') \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Las dos columnas que componen esta suma representan las áreas de los polígonos  $(1, 1', 1'', 1'''\dots)$  y  $-(2, 2', 2'', 2'''\dots)$  respectivamente, las cuales en el límite se convierten en las áreas  $J_1$  y  $J_2$ , de las dos curvas descritas por los extremos  $A_1$  y  $A_2$  de la barra, en sentido positivo la primera y negativo la segunda. Podemos, pues, escribir :

$$J = J_1 - J_2 \qquad [2]$$

fórmula que sirve también para el caso en que las dos curvas

se corten un número cualquiera de veces, con tal que se observe rigurosamente la regla relativa al signo.

Las fórmulas [1] y [2] expresan solamente *la teoría geométrica* del planímetro ; queda, pues, por exponer la *parte mecánica del mismo*.

Hagamos correr el extremo  $A_2$  de la barra sobre una curva de área  $J_2$  conocida, y la punta  $A_1$  sobre la curva cuya área queremos determinar. Como ésta tiene por expresión

$$J_1 = J_2 + l \int dp \quad [2']$$

podremos calcularla inmediatamente, si el aparato está provisto de un *dispositivo que permita medir*  $\int dp$ . Para este objeto, el planímetro de Amsler tiene una ruedecilla, cuyo eje es la barra  $A_1, A_2$ , y que, naturalmente, al moverse ésta, rueda sobre el papel. Llamemos  $\lambda$  la distancia desde el extremo  $A_2$  a la rueda (figura 21),  $\rho$  al radio de ésta y  $\psi$  al ángulo que gira en un movimiento de la barra. El elemento de ángulo  $\psi$  puede descomponerse en otros tres:  $d\psi_1, d\psi_2$  y  $d\psi_3$ , correspondiendo cada uno de ellos a uno de los tres movimientos simples en que hemos descompuesto cada movimiento infinitesimal de la barra. En la traslación 1) a lo largo de  $A_1A_2$  la rueda no gira, luego,  $d\psi_1=0$ . En la traslación normal 2) la rueda gira recorriendo sobre el papel una longitud  $dp = \rho d\psi_2$ ; luego,  $d\psi_2 = \frac{1}{\rho} dp$ . En el giro 3), de amplitud  $d\varphi$ , alrededor de  $A_2$ , la rueda gira un ángulo  $d\psi_3$ , que en virtud de la igualdad  $\lambda d\varphi = \rho d\psi_3$  es  $d\psi_3 = \frac{\lambda}{\rho} d\varphi$ . Sumando los tres movimientos tendremos:

$$d\psi = \frac{1}{\rho} dp + \frac{\lambda}{\rho} d\varphi.$$

Integrando a lo largo de toda la curva es  $\int d\varphi = 0$  si  $A_1A_2$  vuelve a su posición primitiva, sin realizar un giro completo y, por consiguiente, es

$$\psi = \frac{1}{\rho} \int dp. \quad [3']$$

En el caso contrario, en que la barra realizase uno o más giros completos, habría que sumar o restar múltiplos de  $2\pi \frac{\lambda}{\rho}$ , pero prescindimos de este caso, como hemos hecho anteriormente.

De las fórmulas [2'] y [3'] se deduce

$$J_1 - J_2 = l \cdot \rho \cdot \psi,$$

es decir, la diferencia entre las áreas de las curvas descritas por los dos extremos de la barra, está medida por medio del ángulo  $\psi$  que gira la rueda.

El aparato de Amsler, está construído de modo que el área  $J_2$  es nula. Para ello, la barra móvil está sujeta por el extremo  $A_2$  a una biela rectilínea que puede girar alrededor de un punto fijo  $M$  (fig. 22); de este modo,  $A_2$  tiene que moverse sobre un arco de circunferencia sobre el cual va y viene, volviendo finalmente al punto de partida (prescindimos para mayor sencillez, del caso en que recorra una o más veces la circunferencia com-

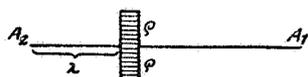


Figura 21



Figura 22

pieta). En atención al polo  $M$  es por lo que se llama *planímetro polar*. Para calcular el área encerrada por una curva  $J_1$ , basta, pues, recorrer ésta con el extremo de un punzón que representa el extremo  $A_1$ , leer el ángulo  $\psi$  que haya girado la rueda, y efectuar el producto:

$$S_1 = l \cdot \rho \cdot \psi;$$

la constante  $l\rho$  del aparato se determina midiendo un área conocida, por ejemplo, el cuadrado unidad. La figura 23 representa esquemáticamente el planímetro polar, pero convendrá que el lector examine el aparato y lo maneje para llegar a su comprensión total.

Es evidente, que para que el planímetro funcione de un modo preciso, su construcción tiene que ser algo más complicada que lo que exigiría sólo la teoría; diremos sólo algunos pormenores.

El punto  $M$  está sujeto a una masa pesada, y de él parte una barra que termina en el punto  $A_2$ . El segmento teóricamente importante  $A_1A_2$ , del que siempre hemos hablado, no es la segunda barra de metal que se ve en el aparato, sino la prolongación ideal, paralela a esa barra, del eje del rodillo  $R$  unida a ella, que pasa por el portalápiz  $A_1$ . A esta punta acompaña otra barrita paralela a ella, roma y algo más baja, destinada a impedir

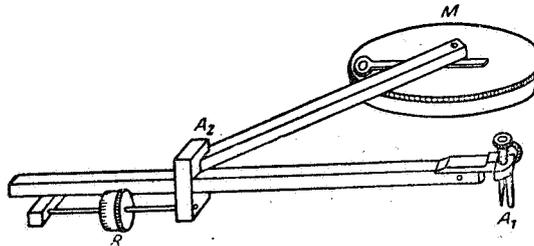


Figura 23

que la primera penetre en el papel. El rodillo lleva un nonius para medir las fracciones de vuelta, y un contador de vueltas completas.

En lugar de detenerse en la exposición de otras particularidades del aparato, me parece preferible aprovechar esta ocasión para prevenir de un modo general acerca de los inconvenientes de conformarse con la teoría y prescindir de la realización práctica, como, desgraciadamente, ocurre con mucha frecuencia a los matemáticos puros. Esta inclinación es tan injustificada como la de los mecánicos que, sin interesarse por la teoría, se preocupan exclusivamente de los detalles de construcción. La *Matemática aplicada* debe formar el lazo de unión entre ambas tendencias, teniendo en cuenta que la formulación teórica del principio nunca podrá realizarse exactamente en el aparato. Así, por ejemplo, en el planímetro de Amsler hay siempre varias causas de error: las palancas cabecean algo, el rodillo resbala un poco sobre el papel en lugar de sólo rodar; por último, el mismo plano del dibujo no es perfecto, y es imposible seguir exactamente la curva con el punzón. El cálculo de la influencia de estos errores; saber hasta cuántas cifras de la lectura del rodillo pueden considerarse como exactas, son cosas, natural-

mente, de gran importancia en la práctica, y eso es cosa que tiene que investigar la Matemática aplicada.

Las características de la Matemática aplicada en relación con la pura, pueden ser estudiadas en los cursos que han sido litografiados: *Anwendung des Differential und Integralrechnung auf Geometrie, Eine Revision der Prinzipien* (\*) y *Einleitung in die höhere Geometrie* (\*\*). El primero de ellos tiene como principal objetivo establecer los caracteres que diferencian la Geometría práctica de la abstracta. El otro, por el contrario, está dedicado exclusivamente a desenvolver con toda amplitud teorías de Geometría abstracta, cuyo conocimiento es necesario a los matemáticos especializados que quieran dedicarse a la investigación geométrica.

Las presentes lecciones quisiera dedicarlas a la exposición de lo que podría llamarse *Geometría teórica elemental*, aquello que imprescindiblemente debiera conocer todo aspirante al profesorado, y, en particular, lo que es de fundamental importancia en Mecánica y Física, prescindiendo de las materias correspondientes a aquellos otros dos campos, a los que sólo incidentalmente habré de referirme.

Volviendo al interrumpido estudio de la determinación de áreas y volúmenes, vamos a comenzar por unas notas de carácter histórico.

El primer matemático que utilizó en la Geometría de un modo consecuente el *principio del signo* fué el gran geómetra de Leipzig A. F. Möbius, que lo dió a conocer en el libro *Der barycentrische Calcul* (\*\*\*), publicado en 1827, fundamental para la Geometría moderna, y de lectura muy agradable por la belleza de la exposición. El motivo de haber sido titulada «Cálculo baricéntrico», consiste en haber partido Möbius de las consideraciones siguientes, basadas en los baricentros: Sean tres puntos,  $O_1, O_2, O_3$  fijos en un plano, en los cuales hay tres masas  $m_1, m_2, m_3$ , que, como en el caso de cargas eléctricas, pueden ser

(\*) Lecciones explicadas por Klein y recogidas por C. H. Müller. Leipzig, 1907; nueva edición.

(\*\*) Lecciones explicadas por Klein y recogidas por Schilling, dos tomos. Leipzig, 1907.

(\*\*\*) Leipzig, 1827 = *Gesammelte Werke*, tomo I (Leipzig, 1885). 633 páginas.

positivas o negativas; el centro de gravedad,  $P$ , del sistema está unívocamente determinado, y variando las masas  $m_1, m_2, m_3$ , puede recorrer todo el plano. Las tres masas pueden, por lo tanto, ser consideradas como coordenadas del punto  $P$ , con lo que introdujo Möbius en la Geometría lo que ahora se denomina en general *coordenadas triangulares*. Esto es suficiente como justificación del título de la obra de Möbius; en cuanto a su contenido, muy interesante, lo principal, para lo que ahora nos ocupa, son los párrafos 17-20, en los que se aplica el principio del signo en la determinación del área del triángulo y del volumen del tetraedro, y se encuentran las definiciones precisas que hemos utilizado.

Möbius completó, ya viejo, en 1858, estos resultados obtenidos en su juventud con un descubrimiento de gran importancia, que no fué publicado hasta 1865 en el trabajo *Ueber die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders* (\*), en el cual demostró que existen poliedros a los cuales no puede asignárseles un volumen determinado, al contrario de lo que ocurre con los polígonos planos, para los que, por complicados que sean sus contornos, siempre puede definirse un área determinada.

Para estudiar esta notable propiedad partiremos de la fórmula que habíamos establecido para el volumen del tetraedro.

$$(1, 2, 3, 4) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la última columna, esto equivale a descomponer el tetraedro, análogamente a lo que hicimos en los triángulos, en otros cuatro, cada uno de los cuales tiene por base una cara del primero, y por vértice opuesto el origen de coordenadas. Atendiendo a que 1, 2, 3, 4 están dispuestos en orden cíclico, se obtiene la fórmula:

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 4) - (0, 3, 4, 1) + (0, 4, 1, 2) - (0, 1, 2, 3)$$

(\*) Berichte über die Verhandlungen der Königlichen Sächsischen Gesellschaft des Wissenschaften (mat.-phys. Kl). Bd. 17, 1865. Pág. 31 — Gesammelte Werke, II (Leipzig, 1886). p. 473.

en la cual aparecen signos menos, mientras que en los triángulos todos los términos eran positivos. La causa de ello es que los determinantes de orden par cambian de signo por permutación circular de sus filas o columnas y los de orden impar no. Naturalmente, por medio de permutaciones adecuadas, se pueden eliminar de la fórmula los signos menos, pero entonces se pierde ya la permutación circular de los vértices; así, por ejemplo, se puede escribir :

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 2, 3, 4) + (0, 4, 3, 1) + (0, 4, 1, 2) + (0, 2, 1, 3)$$

Para ver intuitivamente la regularidad contenida en esta fórmula imaginemos la superficie del tetraedro extendida sobre el plano 2, 3, 4, con lo cual el vértice 1 ocupa tres posiciones distintas (fig. 25).

Recorriendo los vértices en el orden indicado por la última fórmula, el sentido del movimiento es en todos los triángulos con-

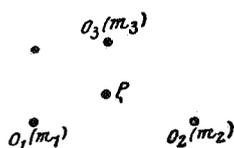


Figura 24

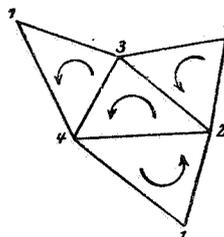


Figura 25

trario al de las agujas de un reloj, luego todos ellos son positivos.

Este resultado puede obtenerse también, sin necesidad de desarrollar la superficie del tetraedro, fijándose en que cada arista es lado común a dos caras, y al recorrer todos los triángulos en un sentido prefijado, cada arista queda recorrida dos veces, una en un sentido y otra en el opuesto. Esta regla, llamada por Möbius ley de las aristas, establece en cada cara un sentido cuando de cualquier modo se ha fijado el de una de ellas. La última fórmula establecida puede, pues, interpretarse del siguiente modo: *Un tetraedro (1, 2, 3, 4) puede ser considerado como suma de otros cuatro que tengan común el primer-vértice O y cuyos otros tres suceden al O en el orden indicado por la continuación del sentido (2, 3, 4) según la ley de aristas de Möbius.*

De la misma manera que generalizamos el concepto de área de un polígono partiendo de la fórmula de descomposición en triángulos, vamos a utilizar el resultado últimamente obtenido para llegar a la *definición del volumen de un poliedro cualquiera*.

Al hacerlo, habremos de admitir que los lados pertenecientes a la misma cara pueden cortarse y, asimismo, que puedan cortarse dos caras que no tengan una arista común, y comenzaremos tomando un punto auxiliar cualquiera,  $O$ , y definiendo el volumen de la pirámide que proyecta desde  $O$  una de las caras del poliedro. Para ello fijamos un sentido de recorrido en la base, por ejemplo, la cara (1, 2, 3, 4, 5, 6) del poliedro (fig. 26), con lo cual este polígono tiene un área determinada según lo dicho, y llamaremos volumen de esta pirámide (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), como en la Geometría elemental, a la tercera parte del producto de esta área

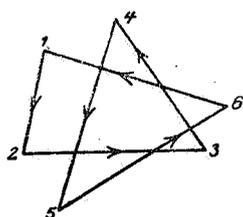


Figura 26

de la base por la altura, sin otra variación que darle signo negativo o positivo según que al mirar desde el punto  $O$ , la sucesión (1, 2, 3, 4, 5, 6) aparezca ordenada en el sentido del movimiento de las agujas de un reloj o en el opuesto. Se ve inmediatamente que esta definición contiene, como caso particular, la antes dada para el volumen del tetraedro, de la cual hubiera podido obtenerse descomponiendo el polígono en triángulos y sumando los tetraedros que resultan al proyectar desde el punto  $O$ .

Al considerar un poliedro cualquiera como suma de partés piramidales, se hace preciso asignar un sentido a *cada* una de las caras que han de servir de bases. Nada más conveniente para ello que la ley de aristas de Möbius, utilizando la cual, basta *asignar un sentido determinado a una cara cualquiera y continuar después de modo que las dos veces en que cada arista queda recorrida, lo sea en sentidos contrarios*. Si esta determinación del sentido puede llevarse a cabo sin contradicción sobre toda la

superficie, el volumen del poliedro queda definido como suma de las pirámides que se obtienen proyectando desde  $O$  todas las caras tomadas en el sentido indicado. Fácilmente se ve que esta determinación es unívoca e independiente de la posición del punto  $O$ .

Ahora bien, es verdaderamente notable el hecho de que la determinación del sentido con arreglo a la ley de aristas no puede ser llevada a cabo en todos los poliedros sin contradicción, es decir, que hay poliedros para los cuales cae en defecto toda definición de signo y, en consecuencia, no se les puede asignar volumen determinado.

Este es el gran descubrimiento debido a Möbius, publicado en 1865, y tiene por origen el estudio de la superficie posteriormente llamada *superficie de Möbius*, que se obtiene recortando una

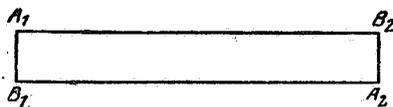


Figura 27

hoja rectangular de papel  $A_1B_1A_2B_2$  (fig. 27) de forma bastante alargada y pegando el lado  $A_1B_1$  sobre el opuesto, de modo que  $A_1$  quede sobre  $A_2$  y  $B_1$  sobre  $B_2$ , habiendo dado una sola vuelta al papel, con lo cual se une la cara anterior de la superficie con la posterior y resulta una *superficie que solamente tiene una cara*.

Dicho de un modo gráfico: un pintor que quisiera pintar la superficie necesitaría emplear doble cantidad de color que la calculada atendida la longitud de la hoja, pues si la pinta antes de cerrarla en la forma indicada, cuando la haya pintado en toda su longitud, estaría precisamente detrás de la posición inicial y tendría que continuar dando otra vuelta hasta volver realmente a esta posición.

En lugar de esta hoja curva, se puede construir también una superficie poliédrica (no cerrada) de la misma propiedad.

Para ello se divide el rectángulo en triángulos (fig. 28) y si se dobla el papel por las aristas así marcadas, resulta, después de pegar los extremos, como antes, una superficie poliédrica que goza de la misma propiedad de la anterior y a la cual no es posible

aplicar la ley de aristas. Para la construcción es preciso tomar al menos 5 triángulos del modo indicado en la figura, con lo cual los dos medios triángulos de los extremos quedan, después de pegados éstos, formando un solo triángulo (4, 5, 1) igual a los restantes. Si se pretende recorrer las aristas en sentido positivo

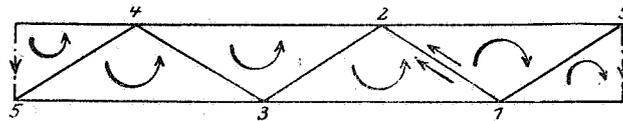


Figura 28

a partir de (1, 2, 3) y con arreglo a la ley de Möbius, habrá que seguir el orden (1, 2, 3), (3, 2, 4), (3, 4, 5), (5, 4, 1), (5, 1, 2) y la arista 1, 2 quedará recorrida dos veces en el mismo sentido, no cumpliéndose, por lo tanto, la citada ley. La superficie así dispuesta presenta, vista desde encima, una forma pentagonal, cuyas diagonales son las aristas 13, 35, 52, 24, 41, como indica la figura 29.

De esta superficie poliédrica obtiene Möbius un poliedro cerrado, proyectando las aristas libres, o sea las 5 diagonales, desde un punto  $O$  que lo mejor es tomarlo en el centro del pentágono; es decir, adaptando a éste una pirámide pentagonal de

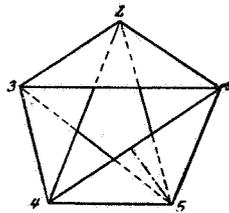


Figura 29

vértice  $O$ . Resulta así un poliedro limitado por diez caras triangulares, que no es susceptible de la aplicación de la ley de aristas, y que por lo tanto carece de volumen (\*).

(\*) Véase la aplicación de este poliedro a la Estática gráfica en el trabajo de Klein «Über Selbstspannung ebener Diagramme» Mathematische Annalen, tomo LXVII, pág. 438; y, también en Klein, Gesammelte Mathematische Abhandlungen, tomo II, pág. 692.

Otro poliedro cuya superficie es de una sola cara, cerrado y de construcción muy sencilla, se deduce fácilmente de un octaedro  $ABCDEF$  (fig. 30) del siguiente modo: Se toman cuatro de las caras del octaedro, tales que cada dos no sean contiguas y, por lo tanto, no tengan ninguna arista común, pero tengan común un vértice (por ejemplo,  $AED$ ,  $EBC$ ,  $CFD$  y  $ABF$ ) y se les agrega los tres planos diagonales  $ABCD$ ,  $EBFD$ ,  $AECF$ . El heptaedro así formado (\*) tiene las mismas aristas que el octaedro, pues en cada una de las de éste se ve que se unen dos caras contiguas del heptaedro (o sea una cara y un cuadrado diagonal del octaedro). Las diagonales del octaedro no se encuentran entre las aristas del heptaedro, porque en éste no son contiguas

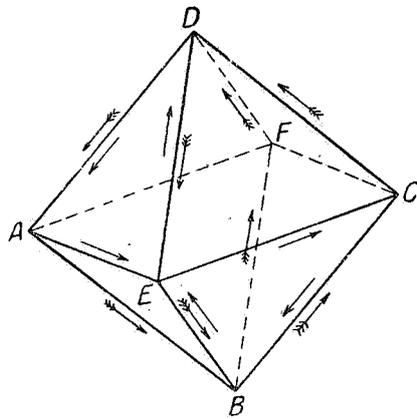


Figura 30

los planos diagonales del octaedro: tales diagonales  $AC$ ,  $BD$ ,  $EF$  son rectas de intersección de la superficie del heptaedro consigo mismas. Se reconoce que esta superficie es de una sola cara sin más que aplicar la ley de aristas. Tomemos, en efecto, las caras necesarias  $AED$ ,  $EDFB$ ,  $ECB$ ,  $ABCD$  y fijemos un sentido en el contorno de la primera; determinando para las otras el sentido correspondiente en la ley de aristas, se ve que la arista  $AD$  es recorrida dos veces en el mismo sentido.

(\*) Citado por primera vez en Reinhardt, C.: Zu Möbius' Polyedertheorie. Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (math.—physikalische Klasse), tomo XXXVIII, 1885.

Terminado con esto el estudio de la aplicación del signo a las áreas y volúmenes, vamos a pasar al de *otras magnitudes geométricas elementales*, iniciado por el gran geómetra de Stettin *Hermann Grassmann* con su libro *Linealen Ausdehnungslehre* (\*). Esta obra es, como la de Möbius, extraordinariamente rica en ideas, pero, al contrario que la de Möbius, está escrita con tan poca claridad que durante muchos años, ha quedado incomprendida. Para hacerse idea de la abstracta manera en que está escrito, basta fijarse en los títulos que encabezan los capítulos de la Introducción, que son los siguientes: Deducción del concepto de Matemática pura; Deducción del concepto de Teoría de la extensión; Razonamiento del concepto de Teoría de la extensión; Forma de la exposición; a cuyos títulos aún sigue: «Ojeada sobre la Teoría general de las formas», y una vez terminadas estas ideas generales, comienza la exposición puramente conceptual del objeto del libro en términos de comprensión cada vez más difícil. En una edición posterior de la *Ausdehnungslehre* (\*\*) utiliza Grassmann una representación analítica, por medio de coordenadas, que es un poco más accesible. La palabra *Ausdehnungslehre* (teoría de la extensión) fué empleada por Grassmann para indicar que la disciplina a que da nombre se refiere al espacio de cualquier número de dimensiones, reservando la palabra «Geometría» para la aplicación de esta nueva disciplina al espacio ordinario de tres dimensiones. Dicha nueva denominación no se ha vulgarizado, sin embargo, empleándose comúnmente hoy para indicar el mismo concepto, la frase *Geometría-n-dimensional*.

En el siguiente capítulo utilizamos la representación por medio de coordenadas, para llegar a los conceptos de Grassmann, limitándonos por el pronto, a la Geometría plana.

## II. Principio de Grassmann en el plano

En el capítulo anterior hemos establecido que el determinante

(\*) Leipzig, 1844. *Gesammelte mathematische und physikalische Werke I*. Leipzig, 1894; segunda edición, Leipzig, 1898.

(\*\*) Berlín, 1862. Véase *Obras completas*, I, Leipzig, 1896.

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

formado con las coordenadas de tres puntos, representa el doble del área de su triángulo, o sea, el área de un paralelogramo. Consideremos ahora, las matrices rectangulares formadas con las coordenadas de dos puntos, o de uno solo :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad |x_1 \ y_1 \ 1|$$

Cada una de estas matrices, así encerradas entre barras, representa la *suma de los determinantes que se obtienen suprimiendo en ella una o dos columnas respectivamente*. Así, de la primera, se obtienen suprimiendo sucesivamente la primera, la segunda o la tercera columna :

$$Y = y_1 - y_2, \quad X = x_1 - x_2, \quad N = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

La notación se ha escogido de modo que facilite el estudio de la Geometría del espacio. Tenemos que estudiar ahora qué clase de forma geométrica está determinada por estos tres determinantes  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ ; y podremos considerar esta figura como una nueva *magnitud geométrica elemental*, con el mismo derecho que hasta ahora hemos considerado el área del triángulo. En la segunda matriz, los determinantes obtenidos, son el número 1 y las coordenadas  $x_1$ ,  $y_1$ , que determinan un punto como la magnitud elemental más sencilla, sobre la cual nada hay que investigar.

El *principio de Grassmann*, enunciado en toda su generalidad, es el siguiente: *Considerando tanto en el plano como en el espacio, todas las matrices rectangulares, con menos filas que columnas, cada una de cuyas filas está formada por las coordenadas de un punto y el número 1, se trata de investigar las formas geométricas definidas por los determinantes que se obtienen de dichas matrices, por supresión de un número suficiente de columnas.*

Más adelante veremos que este principio, que ahora establecemos de un modo algo arbitrario, y que sólo parece ser una guía

conveniente entre el conjunto de las figuras fundamentales, es una consecuencia natural de un amplio conjunto de ideas que abarca toda la sistematización de la Geometría.

Volviendo ahora al problema concreto del plano, propongámonos investigar qué es lo que se da en la figura de dos puntos 1, 2 (fig. 31), cuando se conocen los determinantes  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ . Es evidente que la posición de ambos puntos, tiene todavía un *grado de libertad*, puesto que esta posición queda completamente determinada mediante el conocimiento de cuatro magni-

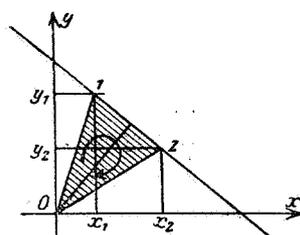


Figura 31

tudes, y aquí sólo se dan tres. Pues bien, decimos que: *Los valores de  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ , no varían cuando, y sólo en este caso, 1 sea el extremo y 2 el origen de un segmento de longitud y sentido determinados, que puede trasladarse arbitrariamente sobre una recta determinada; la flecha indicadora del sentido, la suponemos aquí, y en cuanto sigue, colocada de manera que 2 sea el origen y 3 el extremo, pues su ecuación*

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

puede también escribirse en la forma

$$Y \cdot x - X \cdot y + N = 0,$$

en la cual se ve que esta *recta queda también determinada por las razones  $X : Y : N$ .*

Para ver que los valores de  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ , permanecen invariables al trasladarse el segmento 12 sobre su recta, basta fijarse en que, según lo dicho al hablar de longitudes de segmentos y áreas de triángulos,  $X$  e  $Y$  son, respectivamente, las proyecciones

del segmento (1, 2), sobre los ejes  $x$  e  $y$ , y  $N$  representa el doble del área del triángulo (0, 1, 2), recorrido en el sentido 0, 1, 2, y evidentemente los únicos cambios de posición de los puntos 1, 2, en que estas tres magnitudes se conservan invariables, son las traslaciones del segmento (1, 2), siendo constantes su longitud y sentido. *Grassmann* llamaba a los segmentos de la misma longitud y sentido de una recta determinada *Linienteil* (porción de recta), pero el nombre hoy generalizado es el de *vector* y, aún más preciso *vector deslizante*, para distinguirlos de los *vectores libres* o simplemente *vectores*, de la misma longitud y sentido, pero que pueden trasladarse fuera de sus rectas. *Un vector deslizante, determinado por la matriz*  $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$  *o por los determinantes*  $X, Y, N$ , *es, por consiguiente, la primera forma geométrica elemental que obtenemos en virtud del principio de* *Grassmann*.

Es digno de observarse, que las magnitudes  $X$  e  $Y$ , determinan un vector libre, por ser invariables en toda traslación paralela del segmento. Análogamente, las dos magnitudes expresadas por las razones  $X : Y : N$ , sólo determinan una recta ilimitada, y no la longitud de un segmento. Existe, pues, cierta correlación entre la recta ilimitada y el vector libre, sobre la cual insistiremos más adelante.

Estas ideas juegan un importantísimo papel en *Estática*, habiendo sido empleadas hace ya tiempo, aunque en una forma más empírica. En la *Estática de los sistemas planos rígidos*, un vector puede considerarse como la representación geométrica de una fuerza cuyo punto de aplicación puede, en virtud de la rigidez del cuerpo, variar a lo largo de la dirección en que la fuerza se aplica. Así se ha representado en la figura 32 una fuerza como ha sido costumbre en *Mecánica*: como ejemplo de la manera con que se daba vida a los conceptos en la *Mecánica antigua*, digamos que en la línea 12 representativa de una *cuerda*, siempre se ponía una mano que parecía estirar en el sentido 21 (\*).

$X$  e  $Y$  reciben el nombre de *componentes de la fuerza* y  $N$

---

(\*) Véase p. ej. las láminas de *Varignon*, *Nouvelle mécanique ou statique*. París, 1775.

el de momento, respecto del punto  $O$ ; pues de la ecuación de la recta, se deduce que su distancia al origen  $O$  es  $p = \frac{N}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$  luego,  $N$  es, en efecto, el producto de la distancia al origen por la longitud del segmento  $\sqrt{X^2 + Y^2}$ , es decir, la intensidad de la fuerza.

Los tres números  $X, Y, N$ , se llaman coordenadas de la fuerza. La definición analítica da para cada una de ellas (y esto es

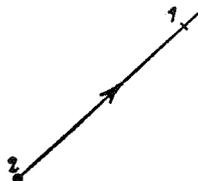


Figura 32

esencial), un determinado signo, que, naturalmente, tiene su significación geométrica.

Por razones de simetría en las fórmulas, nos hemos apartado en la determinación del signo del momento de lo usual en Mecánica, que es utilizar los determinantes formados por las coordenadas del punto 2 y las  $X, Y$  del vector libre, en esta forma:

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ X & Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \end{vmatrix},$$

lo cual da para  $N$ , un signo contrario al obtenido anteriormente, pequeña diferencia que carece de importancia una vez advertida.

El primer problema que se presenta en la Mecánica de los sólidos, es hallar la resultante de un sistema arbitrario de fuerzas  $X_i, Y_i, N_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) lo que analíticamente equivale a formar el vector deslizante que tenga por coordenadas.

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i, \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{i=n} N_i$$

La *Estática gráfica* resuelve el problema de un modo muy elegante, utilizando para dos fuerzas el conocido método del paralelogramo, y para más de dos, el polígono de fuerzas y el

polígono funicular, con lo cual se obtiene generalmente un vector único como resultante de un sistema de fuerzas. A veces, sin embargo, hay excepciones; como, por ejemplo, en el caso de que el sistema esté constituido por dos fuerzas paralelas, iguales y de sentidos contrarios, de coordenadas  $X, Y, N_1$  y  $-X, -Y, N_2 (N_1 \neq N_2)$  la resultante tiene entonces por componentes  $0, 0$  y  $N_1 + N_2$ , números que, evidentemente, no pueden ser coordenadas de ningún vector. En este caso, la Mecánica elemental no puede hacer nada, y lo acepta como un elemento irreducible, que denomina *par de fuerzas* que influye desfavorablemente en la sencillez y generalidad de los teoremas. Esta aparente excepción puede, sin embargo, ser incluida en nuestro sistema, aplicando de un modo puramente formal las fórmulas anteriormente obtenidas, a las componentes  $0, 0, N_1 + N_2$  de las fuerzas, con lo cual se obtiene como intensidad de la resultante  $\sqrt{0^2 + 0^2} = 0$ , y como distancia al origen,  $p = \frac{N_1 + N_2}{0} = \infty$ . Ahora bien, si la anulación de la distancia de una fuerza al origen, y la infinitud de su distancia, devienen de tal manera que el momento  $p \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$  se conserva finito, se está en el caso del par de fuerzas y, por tanto, se puede considerar la resultante  $0, 0, N_1 + N_2$  de un par de fuerzas, como una fuerza infinitamente lejana, de intensidad infinitamente pequeña y de momento finito. Esta ficción, en cierto modo correlativa con la consideración de los elementos del infinito en la Geometría, es sumamente útil y cómoda en la Ciencia. Por de pronto, el concepto de fuerza, ampliado de este modo, permite enunciar el siguiente teorema, que carece de excepciones: *Todo sistema de un número cualquiera de fuerzas, que actúan en un plano, tiene siempre una resultante*; mientras que en las exposiciones elementales siempre hay que indicar la excepción del par de fuerzas. Con objeto de completar este estudio, vamos a aplicar a las magnitudes elementales que nos ocupan, las transformaciones del sistema de coordenadas rectangulares. Las fórmulas que permiten efectuar estas transformaciones son, como es sabido, las cuatro siguientes:

1. *Traslación paralela:*

$$(A_1) \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

2. Giro de amplitud  $\varphi$  :

$$(A_2) \begin{cases} x' = x \cos \varphi + y \operatorname{sen} \varphi \\ y' = -x \operatorname{sen} \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$$

3. Simetría respecto del eje  $x$  :

$$(A_3) \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

4. Cambio de unidad :

$$(A_4) \begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

El producto (\*) de estas cuatro clases de transformaciones para todos los valores posibles de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ , da las ecuaciones generales del cambio de ejes de coordenadas, con cambio simultáneo de la unidad. Si se multiplican únicamente todos los giros y traslaciones posibles, se obtienen *todos los movimientos* del primitivo sistema de ejes sobre su plano. El sistema de todas estas transformaciones forma un grupo; es decir, el producto de dos cualesquiera de ellas es otra transformación del mismo sistema, y la inversa de cada transformación también pertenece al grupo.

Las cuatro transformaciones (A), de las cuales resultan todas las demás, se llaman *fundamentales o generatrices del grupo*.

Antes de examinar la influencia que tienen estas transformaciones en los determinantes  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ , es conveniente enunciar dos *principios generales*, que desde ahora quisiera hacer resaltar; y aunque acaso no aparezcan con toda la claridad apetecible al enunciarlos de manera tan general, su aplicación a casos concretos hará desaparecer todo motivo de confusión. El primero dice, que *todas las propiedades geométricas de las figuras deben ser expresadas por medio de fórmulas que permanezcan invariables en toda transformación de coordenadas*, esto es, las coordenadas de todos los puntos de la figura, satisfacen simultáneamente a una de estas transformaciones.

El segundo principio es el recíproco del anterior, y dice que,

---

(\*) Producto de transformaciones, es la transformación que sustituye a la aplicación sucesiva de aquéllas.

*toda fórmula invariante en el grupo de las transformaciones de coordenadas, expresa una propiedad geométrica de la figura.*

Como ejemplos, los más sencillos que pueden proponerse, recordemos simplemente las expresiones de la distancia entre dos puntos y del ángulo de dos rectas; de éstas y muchas otras fórmulas semejantes, haremos uso constante. Para aclarar más, fijémonos en un caso muy trivial para fórmulas no invariantes: la ecuación  $y=0$  para la figura formada por un punto  $(x, y)$  del plano, expresa que este punto está en el eje  $x$ , el cual es realmente arbitrario, completamente extraño a la esencia misma de la figura, y cuyo uso no tiene otro alcance que la comodidad en la descripción. Así toda ecuación no invariante representa una cierta relación de la figura con entes exteriores, libremente añadidos, en particular el sistema de coordenadas, pero nunca propiedades geométricas.

El segundo principio se refiere a los sistemas de magnitudes analíticas, que están formadas por las coordenadas de varios puntos, 1, 2, ...; por ejemplo, las tres magnitudes  $X, Y, N$ , que venimos considerando. *Si este sistema tiene la propiedad de transformarse en sí mismo, de una manera determinada, en todas nuestras transformaciones de coordenadas, es decir, que el sistema de magnitudes formado de la misma manera con las nuevas coordenadas de los puntos 1, 2, ... se expresan en función únicamente de magnitudes formadas con las coordenadas antiguas (sin que hayan de intervenir los valores de estas coordenadas) diremos que define una nueva figura geométrica, es decir, una figura independiente del sistema de coordenadas; y clasificaremos todas las expresiones analíticas, atendiendo precisamente a la manera de comportarse en las transformaciones de coordenadas, y tomaremos, por definición, como figuras geométricas equivalentes, es decir, de la misma especie, dos series de expresiones que se transformen de la misma manera.*

Apliquemos todo esto al material proporcionado por las magnitudes elementales de Grassmann.

Aplicando a los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  extremos de un vector la primera transformación o traslación paralela ( $A_1$ ) se obtiene:

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_1 + a, & x'_2 &= x_2 + a \\y'_1 &= y_1 + b, & y'_2 &= y_2 + b\end{aligned}$$

Las coordenadas del vector, antes y después de la transformación, son :

$$\begin{aligned} X &= x_1 - x_2, & Y &= y_1 - y_2, & N &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ X' &= x'_1 - x'_2, & Y' &= y'_1 - y'_2, & N' &= x'_1 y'_2 - x'_2 y'_2 \end{aligned}$$

de donde resulta :

$$(B_1) \begin{cases} X' = X \\ Y' = Y \\ N' = N + bX - aY \end{cases}$$

Análogamente se obtiene como fórmulas de transformación :

2.º Para el giro ( $A_2$ ) :

$$(B_2) \begin{cases} X' = X \cos \varphi + Y \operatorname{sen} \varphi \\ Y' = -X \operatorname{sen} \varphi + Y \cos \varphi \\ N' = N \end{cases}$$

3.º Para la simetría ( $A_3$ ) :

$$(B_3) \begin{cases} X' = X \\ Y' = -Y \\ N' = -N \end{cases}$$

4.º Para el cambio de escala ( $A_4$ ) :

$$(B_4) \begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \lambda Y \\ N' = \lambda^2 N \end{cases}$$

En estas últimas fórmulas aparece por primera vez lo que en Física se llama *dimensión*; es decir, el exponente de la potencia de  $\lambda$  por quien hay que multiplicar  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ . Las dos primeras coordenadas tienen la dimensión 1 de una línea;  $N$ , en cambio, tiene la dimensión 2 de una superficie.

Observando los cuatro grupos de fórmulas, se ve que el vector definido por los determinantes  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ , satisface a la definición general que hemos dado de magnitudes geométricas, puesto que las nuevas coordenadas  $X'$ ,  $Y'$ ,  $N'$  están expresadas en función únicamente de las antiguas.

Fijádonos, más particularmente, en sólo las dos primeras ecuaciones, vemos que en ellas no interviene para nada  $N$ ; las dos primeras coordenadas  $X'$ ,  $Y'$  del vector en el nuevo sistema coordenado sólo dependen, pues, de los valores primitivos  $X$ ,  $Y$  de estas coordenadas y no varían en las traslaciones paralelas, y en las otras transformaciones están con las  $X'$  e  $Y'$  en las mismas relaciones que las coordenadas primitivas de un punto  $x$ ,  $y$  con las nuevas  $x'$ ,  $y'$ . Con arreglo al segundo principio, podemos, pues, decir que las coordenadas  $X$ ,  $Y$ , determinan una figura geométrica independiente de los ejes, figura que, anteriormente hemos visto, es el vector libre.

Dividiendo cada dos fórmulas consecutivas de cada grupo, resulta que por ser  $X'$ ,  $Y'$ ,  $N'$  funciones lineales homogéneas de  $X$ ,  $Y$ ,  $N$ , las razones  $X' : Y' : N'$  dependen únicamente de las  $X : Y : N$ . Ello significa que estas razones  $X : Y : N$ , determinan también, independientemente de los valores de las cantidades que las forman, una figura geométrica que no depende de los ejes de coordenadas; y, en efecto, ya antes hemos visto que determinan la recta ilimitada 12.

Aplicando las fórmulas (B) al caso particular del par de fuerzas en el que  $X=Y=0$ , se obtienen, naturalmente,  $X'=Y'=0$  y para  $N'$  los siguientes valores, correspondientes a aquellas fórmulas:

$$\begin{aligned} (C_1) \quad N' &= N \\ (C_2) \quad N' &= N \\ (C_3) \quad N' &= -N \\ (C_4) \quad N' &= \lambda^2 N \end{aligned}$$

Llamando *invariante* a toda magnitud que en las operaciones de un grupo de transformaciones queda, a lo sumo, multiplicada por un factor, y clasificando los invariantes en *absolutos* y *relativos*, según que este factor sea o no la unidad, las cuatro fórmulas (C) pueden condensarse en este enunciado: *El momento de un par de fuerzas, es un invariante relativo en el grupo de las transformaciones de coordenadas rectangulares de un plano.*

Consideremos, ahora, el área de un triángulo

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando las fórmulas (A) de transformación, resulta, teniendo en cuenta elementales propiedades de los determinantes,

$$\begin{aligned} (D_1) \quad \Delta' &= \Delta \\ (D_2) \quad \Delta' &= \Delta \\ (D_3) \quad \Delta' &= -\Delta \\ (D_4) \quad \Delta' &= \lambda^2 \Delta \end{aligned}$$

lo que, por otra parte, es fácil de deducir geoméricamente. Estas fórmulas, lo mismo que las (C) expresan que el *área de un triángulo*, y, *por tanto, cualquier área* (puesto que puede considerarse como suma de triángulos) *se comporta en toda transformación de coordenadas, exactamente como el momento de un par de fuerzas*. Se puede, por consiguiente, con arreglo al segundo principio general antes enunciado, considerar ambas magnitudes como geoméricamente equivalentes y precisar el sentido de esto de la siguiente manera: Si tenemos en el plano un par cualquiera de fuerzas con el momento  $N$  y definimos un área de triángulo  $\Delta = N$ , en toda transformación de coordenadas subsiste esta igualdad, es decir, podemos *representar geoméricamente el momento de un par de fuerzas por el área de un triángulo o de un paralelogramo o de cualquier otra figura independientemente de la posición de los ejes de coordenadas*.

### III. El Principio de Grassmann en el espacio

Análogamente a como hemos hecho en el plano, consideremos las cuatro matrices formadas por las coordenadas de 1, 2, 3 ó 4 puntos, respectivamente, y el número 1

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Los determinantes que se obtienen de la primera matriz son las coordenadas del punto y no ofrecen, por lo tanto, ningún nuevo interés. El de la última matriz es, como se sabe, igual al séxtuplo del volumen del tetraedro (1, 2, 3, 4) que atendiendo a denomi-

naciones que luego utilizaremos, llamaremos *elemento espacial*, y que puede considerarse simplemente como volumen del paralelepípedo que tenga por aristas 41, 42, 43 que Grassmann llamaba *espato*, tomando esta palabra de la Mineralogía (*espato calizo, espato fluor, etc.*)

La segunda y la tercera matriz dan origen a las nuevas figuras. La matriz de dos filas, representa el conjunto de los seis

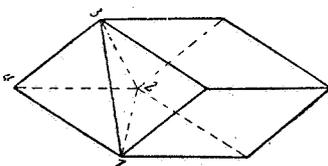


Figura 33

determinantes *de segundo orden* siguientes, que resultan de la *supresión* de cada par de columnas:

$$(1) \begin{cases} X = x_1 - x_2, & Y = y_1 - y_2, & Z = z_1 - z_2, \\ L = y_1 z_2 - y_2 z_1, & M = z_1 x_2 - z_2 x_1, & N = x_1 y_2 - x_2 y_1; \end{cases}$$

análogamente la tercera matriz, representa estos *cuatro determinantes de tercer orden*:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} l = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} \\ n = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad p = - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

De las consideraciones relativas al plano, puede fácilmente deducirse que  $X, Y, Z$  representan las proyecciones del segmento 21, sobre los ejes, y  $L, M, N$  los duplos de las proyecciones del triángulo 0 12 (tomado precisamente en este sentido), sobre los planos coordenados. Todas estas cantidades permanecen invariables, cuando el segmento 12 se mueve a lo largo de su misma recta conservando su longitud, luego, en conjunto, representa lo que llamaremos *un vector en el espacio*. Las  $X, Y, Z$  perma-

necen además invariables cuando el vector se mueve paralelamente a sí mismo y, por consiguiente, representan por sí solas un *vector libre*. Asimismo, las cinco razones  $X : Y : \dots : N$ , que no varían aunque cambien el sentido y la longitud del vector

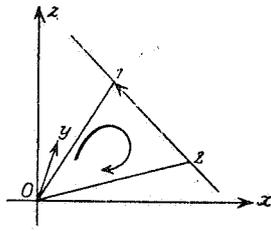


Figura 34

sobre su misma recta, pueden considerarse como representantes de la *recta (12) indefinida*.

Los cuatro determinantes (2) determinan, en primer lugar, el plano de los tres puntos 1, 2, 3, puesto que su ecuación :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

puede evidentemente escribirse en la forma :

$$lx + my + nz + p = 0$$

pudiendo observarse también que las razones  $l : m : n : p$  determinan el *plano ilimitado*.

$l$ ,  $m$  y  $n$  son las proyecciones del triángulo (1, 2, 3) tomado siempre en este sentido, sobre los planos coordenados y  $p$  el séxtuplo del volumen del tetraedro (0, 1, 2, 3), con el signo correspondiente a este orden de sucesión de los vértices. La condición necesaria y suficiente para que estas cuatro cantidades se conserven invariables en todos los movimientos del triángulo (1, 2, 3) en su plano, es que tanto el área como el sentido de dicho triángulo permanezcan fijos. Así queda definido un triángulo móvil con las restricciones indicadas, el cual fué llamado por Grassmann *elemento plano* o *magnitud* o *área plana* (Plangrösse).

Las tres primeras coordenadas  $l$ ,  $m$ ,  $n$  permanecen además invariables, cuando el plano se mueve paralelamente a sí mismo, luego determinan por su parte un triángulo susceptible de moverse en estas condiciones, llamado por Grassmann *área plana libre* (freie Plangröße).

Volviendo a ocuparnos del *vector*, observaremos en primer lugar, que su posición en el espacio queda determinada por cinco parámetros, pues aunque las coordenadas de sus extremos son seis, uno de ellos sólo puede moverse libremente sobre una recta. Las seis coordenadas del vector  $X$ ;  $Y$ ,  $Z$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , no pueden pues, ser independientes entre sí, sino que tendrán que satisfacer a alguna condición. Para investigar cuál ha de ser ésta, consideremos el determinante

$$\begin{vmatrix} \boxed{x_1} & \boxed{y_1} & \boxed{z_1} & 1 \\ \boxed{x_2} & \boxed{y_2} & \boxed{z_2} & 1 \\ \boxed{x_1} & \boxed{y_1} & \boxed{z_1} & 1 \\ \boxed{x_2} & \boxed{y_2} & \boxed{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

evidentemente nulo por tener dos filas iguales. Desarrollándolo por menores complementarios formados con las dos primeras y las dos últimas filas, se obtiene, como primer sumando, el formado por el producto de los dos menores de segundo orden indicados por las líneas de puntos, producto que es igual a  $NZ$ , como es fácil comprobar. Procediendo de este modo, se obtiene como valor total del determinante,  $2(NZ+MY+LX)$ , y puede, por consiguiente, escribirse la identidad

$$X \cdot L + Y \cdot M + Z \cdot N = 0 ; \quad (3)$$

que expresa la condición a que han de satisfacer las coordenadas de todo vector.

Se puede ver fácilmente que la condición (3) entre las seis magnitudes es suficiente para que éstas determinen un vector como coordenadas del mismo, según las fórmulas (1).

Pasemos, ahora, a la *aplicación de este concepto a la Mecánica*.

Aquí, lo mismo que en el plano, *un vector representa la línea de aplicación, la magnitud y el sentido de una fuerza aplicada a un cuerpo rígido de tres dimensiones; X, Y, Z son las componentes de la fuerza en dirección de los ejes coordenados; y L, M, N los momentos respecto de éstos.* Las tres componentes X, Y, Z determinan, además de la magnitud, la dirección de la fuerza y del vector, cuyos cosenos directores están en las razones X : Y : Z; la fuerza (o el vector) se obtiene como diagonal del paralelepípedo cuyas aristas, situadas sobre los ejes coordenados, son X, Y, Z. Mediante análoga construcción, las tres magnitudes L, M, N, determinan una dirección, *la dirección del eje del momento resultante.* En cuanto a la condición (3) a que deben satisfacer las coordenadas, significa, según una conocida fórmula de Geometría, que *la dirección de la fuerza debe ser perpendicular al eje del momento resultante.*

El *par de fuerzas*, lo mismo también que en el plano, resulta de la consideración del caso límite en que  $X=Y=Z=0$  sin que L, M, N sean todos nulos, es decir, que se puede considerar como *una fuerza infinitamente lejana y de intensidad infinitamente pequeña, cuyo momento permanezca finito.*

La teoría elemental elude esta forma de expresión y considera el par de fuerzas como el conjunto de dos fuerzas iguales, paralelas y de sentidos contrarios que actúan en rectas diferentes: X, Y, Z, L<sub>1</sub>, M<sub>1</sub>, N<sub>1</sub> y -X, -Y, -Z, L<sub>2</sub>, M<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, cuya suma da, en efecto, las magnitudes 0, 0, 0, L<sub>1</sub>+L<sub>2</sub>, M<sub>1</sub>+M<sub>2</sub>, N<sub>1</sub>+N<sub>2</sub>, conforme a lo dicho.

Veamos ahora lo que se refiere a la *composición de un sistema de fuerzas cualesquiera, que actúan sobre un sólido:*

$$X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Este problema que en los tratados elementales de Mecánica da lugar a largas y enojosas disquisiciones, por no usar las reglas de los signos, puede aquí ser resuelto inmediatamente efectuando las sumas:

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_{i=1}^{x=n} X_i, & H &= \sum_{i=1}^{x=n} Y_i, & Z &= \sum_{i=1}^{x=n} Z_i \\ \Lambda &= \sum_{i=1}^{x=n} L_i, & M &= \sum_{i=1}^{x=n} M_i, & N &= \sum_{i=1}^{x=n} N_i \end{aligned}$$

que proporcionan las seis *coordenadas del sistema de fuerzas*, o, utilizando una denominación introducida por Plücker, *coordenadas de la dinámica*. Estas coordenadas son como antes, de dos clases, a saber: *las tres componentes a lo largo de los ejes, y los tres momentos respecto de ellos*.

Los sistemas de fuerzas en el espacio presentan una notable diferencia con los planos, que consiste en que esta dinámica no será, en general, una fuerza única, pues las seis coordenadas no satisfarán, en general, a la condición:

$$\Xi \cdot A + H \cdot M + Z \cdot N = 0$$

Resulta, pues, que un *sistema de fuerzas aplicadas a un sólido no se reduce necesariamente a una fuerza* (\*).

Para tener idea más concreta de lo que es un torsor, veamos la manera de representarlo intuitivamente como resultante del menor número posible de fuerzas. La exposición clásica de esta cuestión, es la de *Poinsot*, quien demostró por primera vez en sus *Elements d'Éstatique* (1804) que *un torsor puede considerarse como resultante de una fuerza y un par de fuerzas, cuyo eje, llamado eje central del torsor, es paralelo a la dirección de aquella fuerza; pudiendo efectuarse esta descomposición de un modo único*. El eje central del torsor se denomina también *eje central de Poinsot*.

Para *demostrar* este teorema, observemos que la fuerza resultante, prescindiendo del par, ha de tener por componentes  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$  y como ha de ser paralela al eje del par, los momentos de éste tienen que ser proporcionales a  $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$ . Las coordenadas del par, son, pues:

$$0, 0, 0, k \cdot \Xi, k \cdot H, k \cdot Z,$$

donde  $k$  es un parámetro, por el pronto indeterminado.

Suponiendo que el torsor dado  $\Xi, H, Z, A, M, N$ , se compone del precedente par y de una fuerza, las coordenadas de ésta deberán ser:

---

(\*) La denominación corriente en España, de estos sistemas que no tienen resultante única es la de *torsor*; el autor utiliza la de *dinámica*. (N. del T.)

$$\Xi, H, Z, A - k \cdot \Xi, M - k \cdot H, N - k Z$$

diferencias entre las del torsor y las del par. El teorema estará, pues, demostrado, si se consigue determinar  $k$  de tal modo que estas coordenadas representen efectivamente una fuerza. Para ello es necesario y suficiente que satisfagan a la condición (3); es decir, que sea

$$\Xi(\Lambda - k \cdot \Xi) + H(M - k \cdot H) + Z(X - k \cdot Z) = 0,$$

para lo cual es necesario y suficiente que se verifique

$$k = \frac{\Xi \Lambda + H M + Z N}{\Xi^2 + H^2 + Z^2}$$

expresión que da un valor bien determinado, ya que siempre puede suponerse que el denominador no es nulo, pues si lo fuese, el torsor quedaría reducido a un par.

Dando a  $k$  este valor llamado por Plücker *parámetro de la dinámica*, el torsor queda descompuesto en una fuerza y un par, como quería demostrarse. Por ser único el valor del paráme-

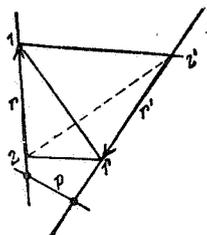


Figura 35

tro  $k$ , la descomposición no puede tampoco efectuarse más que de un solo modo.

Para el estudio de la representación geométrica de esta descomposición, conviene recordar un problema resuelto por Möbius en su *Lehrbuch des Statik* (\*) que puede enunciarse así: *determinar el sistema de ejes, respecto de los cuales el momento*

(\*) Leipzig, 1837. Werke III (Leipzig, 1886).

de un torsor es nulo. Las denominaciones adoptadas por Möbius son *ejes nulos y sistema nulo* (\*).

Sean dos vectores (1, 2) y (1', 2') en el espacio (fig. 35); el tetraedro que tiene por vértices sus extremos, es de volumen

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x'_1 & y'_1 & z'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando este determinante por menores complementarios de segundo orden, relativos a las dos primeras y dos últimas filas, resulta

$$\frac{1}{6} (XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ')$$

donde  $X', \dots, N'$  representan las coordenadas del vector (1', 2').

La expresión

$$XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ',$$

combinación bilineal de las coordenadas de los dos vectores, recibe el nombre de *momento de un vector respecto del otro*, y es, como se ve, *igual a seis veces el volumen del tetraedro que tiene por vértices los extremos de ambos vectores* e independiente, por lo tanto, de la posición de los ejes de coordenadas.

Si  $r, r'$  son las longitudes de los dos vectores,  $\varphi$  su ángulo y  $p$  su mínima distancia, el momento es igual  $r \cdot r' \cdot p \cdot \text{sen } \varphi$  (prescindiendo del signo de  $\varphi$ ).

Sea ahora, en lugar del vector (1, 2), una recta ilimitada. Entenderemos por momento del vector (1', 2'), respecto de esta recta, su momento respecto de un vector de longitud 1, situado sobre ella, o sea,  $r'p \text{sen } \varphi$ . Este resultado puede obtenerse también, dividiendo la precedente expresión por  $r = |\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|$  de modo que *el momento de un vector  $X', Y', Z', L', M', N'$  respecto a la recta ilimitada del vector  $X, Y, Z, L, M, N$ , puede también expresarse así:*

(\*) En España es más corriente la denominación de *sistema focal*. (N. del T.)

$$\frac{XL' + YM' + NZ' + LX' + MY' + NZ'}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|}$$

Este valor depende solamente de las razones de las seis cantidades  $X, Y, \dots, N$  y de su signo común; es decir, queda completamente determinado *cuando se da la recta ilimitada y un sentido sobre ella*, y es lo que en Mecánica recibe el nombre de *momento de la fuerza que el vector representa respecto de la recta considerada como eje*.

El valor del *momento o momento de giro de un torsor* puede obtenerse sumando los momentos de las fuerzas que le componen, con lo cual se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} \frac{XL'_i + YL'_i + ZM'_i + LX'_i + MY'_i + NZ'_i}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|} &= \\ = \frac{X\Lambda + Y.M + Z.N + L.\Xi + L.H + N.Z}{|\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}|} \end{aligned}$$

Haciendo coincidir sucesivamente la recta indefinida de  $X, \dots, N$  con los tres ejes positivos, esta expresión toma los valores  $\Lambda, M, N$ , lo que justifica la denominación antes dada a estas tres magnitudes.

Ahora podemos ya examinar la cuestión planteada por Möbius. La condición para que este momento sea nulo respecto de la recta  $X : Y : \dots : N$ , es

$$\Lambda X + MY + NZ + \Xi L + HM + NZ = 0$$

y, por lo tanto, el *conjunto de las rectas  $X : Y : \dots : N$  representadas por esta ecuación constituye el sistema focal del torsor*. Esta ecuación es la ecuación lineal homogénea más general entre las seis magnitudes  $X, \dots, N$ , puesto que los coeficientes  $\Lambda, \dots, Z$ , como coordenadas de un torsor, pueden ser seis magnitudes arbitrarias. Estos conjuntos de rectas, definidos por una ecuación lineal homogénea arbitraria fueron ya estudiados por Plücker —que, con Möbius, fué el investigador y creador más profundo del siglo XIX en Geometría analítica— quien los denominó *com-*

plejos lineales. Así, pues, el sistema focal de Möbius es exactamente el mismo que el complejo de Plücker.

La representación sensible de un complejo lineal no puede ser una figura geométrica, en el sentido estricto de la palabra, puesto que recubren el espacio infinitas veces las rectas focales (\*).

Sin embargo, es muy fácil comprender cómo están agrupadas. Para ello tomemos los ejes coördenados en la posición más cómoda, lo que se logra escogiendo para eje  $z$  el central del torsor, con lo cual cuatro coordenadas de éste,  $\Xi$ ,  $H$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ , se anulan, y  $M$  y  $N$  representan entonces, respectivamente, la intensidad de la fuerza y el momento de giro del par que componen el torsor, y el parámetro  $k$  toma el valor

$$k = \frac{\Xi \Lambda + HM + ZN}{\Xi^2 + H^2 + Z^2} = \frac{N}{Z}$$

La ecuación del complejo lineal en el nuevo sistema de coordenadas es

$$NZ + ZN = 0$$

que dividida por  $Z$  da

$$kZ + N = 0 \tag{1}$$

Para discutir esta nueva forma, supongamos que  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $P_2(x_2, y_2, z_2)$  son dos puntos de una de las directrices  $X : Y : Z : L : M : N$  del sistema focal; en este caso,  $Z = z_1 - z_2$  y  $N = x_1 y_2 - x_2 y_1$ , y la fórmula (1) da para las coordenadas de cada dos puntos de una recta del sistema focal, la condición

$$k(z_1 - z_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \tag{2}$$

Si suponemos ahora fijo el punto  $P_2$ , la ecuación (2) debe satisfacerse por las coordenadas de todos los puntos  $P_1$  que están con el  $P_2$  en una misma recta del sistema focal.

Llamando, para mayor claridad,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , a las coordenadas

(\*) A estas rectas, llamadas *rectas nulas* por Möbius, y *directrices* por Staud, las designaremos con esta última denominación y también con la de *rectas focales*, de acuerdo con la del sistema que forman. (N. del T.)

del punto variable  $P_1$ , obtenemos para lugar de estos puntos, el plano

$$y_2x - x_2y + kz = kz_2 \quad (2')$$

que pasa por el punto  $P_2$ , puesto que esta ecuación se satisface para  $x=x_2, y=y_2, z=z_2$ .

Con esto queda demostrado que *todas las directrices del sistema focal que pasan por un punto  $P_2$  del espacio, forman un haz de rectas de vértice  $P_2$  y plano (2')*. Falta solamente, hacer ver con una imagen sensible la posición de los planos focales correspondientes a los puntos  $P_2$ .

Las dos expresiones  $N = x_1y_2 - y_1x_2, Z = z_1 - z_2$  que intervienen en la ecuación (2) tienen la propiedad de ser invariantes en todas las traslaciones paralelas al eje  $z$  y en todos los giros alrededor de este mismo eje. Esto se comprueba fácilmente, observando que las traslaciones no afectan a las coordenadas  $x, y$ , sino solamente a las  $z$ , pero sin que la diferencia  $z_1 - z_2$  varíe; análogamente los giros no afectan a las  $z$ , y sí a las  $x, y$ , pero el área  $N = x_1y_2 - y_1x_2$ , gira con el plano  $xy$  permaneciendo invariable en magnitud. Puede por consiguiente afirmarse, que *el sistema focal representado por la ecuación (2) se transforma en sí mismo por todos los giros alrededor del eje central (que es el eje  $z$ ) y por todas las traslaciones paralelas a este eje.*

Esta proposición facilita extraordinariamente la representa-

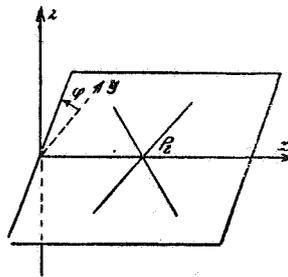


Figura 36

ción geométrica, pues *bastará ya conocer la posición de los planos focales correspondientes a los puntos del semieje  $x$ , para tener los correspondientes a todos los puntos del espacio, ya que por*

medio de giros alrededor del eje  $z$  y traslaciones paralelas al mismo, del semieje  $x$ , puede hacerse pasar por cualquier punto. En otros términos, *los planos focales de los puntos de toda semirrecta perpendicular al eje central, tienen respecto a éste y a la semirrecta, una posición independiente del rayo elegido.*

Limitándonos, pues, a los puntos del semieje  $x$ , basta hacer  $y_2 = z_2 = 0$  en (2'), con lo cual se obtiene:

$$kz - x_2 y = 0,$$

como ecuación del plano focal correspondiente al punto de abscisa  $x_2$ .

Como esta ecuación se satisface para  $y = z = 0$ , el plano pasa

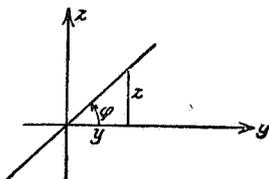


Figura 37

por el eje  $x$ . El ángulo  $\varphi$  que forma con el plano  $xy$ , resulta inmediatamente escribiendo la ecuación en la forma:

$$\frac{z}{y} = \frac{x_2}{k} \quad \text{de donde} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{k}.$$

Este resultado puede expresarse independientemente del sistema de coordenadas, diciendo que *a todos los puntos cuya distancia al eje central, supuesto vertical, es  $r$ , corresponden en el sistema focal planos que pasan por las perpendiculares trazadas por ellos a dicho eje central, siendo la tangente del ángulo que cada uno de estos planos forma con el horizontal,  $\frac{r}{k}$ .* Por consiguiente, si el punto se mueve sobre una semirrecta perpendicular al eje central, el plano focal correspondiente, comienza por ser horizontal para el valor  $z=0$ , y su inclinación va aumentando constantemente en uno u otro sentido (según que sea  $k \gtrless 0$ ), al mismo tiempo que aumenta  $z$ , teniendo como posición asintó-

tica la vertical. Este movimiento puede ser comprendido fácilmente utilizando un modelo de *Schilling*, que se compone (figura 38), de una barra vertical que representa el eje central, y otra perpendicular a ella y susceptible, tanto de girar alrededor de aquélla, como de trasladarse a lo largo de la misma. Esta segunda barra lleva adaptada una hoja plana, que movida hacia

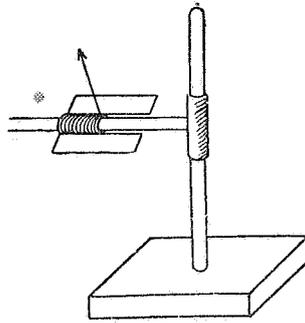


Figura 38

afuera, toma automáticamente por medio de una rosca, la inclinación exacta que da la fórmula.

Consideremos, ahora, la normal al plano focal en el punto  $P_2$ . Sus cosenos directores, están evidentemente en la misma razón que los coeficientes de la ecuación del plano (2'), es decir, en la razón:

$$y_2 : (-x_2) : K \quad (3)$$

Podemos imaginar también, asociada al punto  $P_2$  esta dirección, como dirección de un movimiento helicoidal infinitamente pequeño del espacio. En efecto, si se considera el espacio entero como un cuerpo rígido y simultáneamente se le hace girar un ángulo finito  $\omega$  alrededor de  $z$  y trasladarse una longitud  $c$  paralelamente a  $z$ , las coordenadas de un punto  $x, y, z$ , se convierten en

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega - y \sin \omega \\ y' &= x \sin \omega + y \cos \omega \\ z' &= z + c \end{aligned}$$

Si el movimiento es infinitesimal, la amplitud de su giro es  $-dw$  (el signo *menos* indica que el movimiento es *sinistrorsum* para  $k > 0$ ), y la cuantía de su traslación es  $c = k dw$ . Despreciando los infinitamente pequeños de segundo o mayor orden, se podrá poner  $\cos dw = 1$ ,  $\sin dw = dw$ , y por consiguiente:

$$\begin{aligned} x' &= x + y dw \\ y' &= -x dw + y \\ z' &= z + k dw. \end{aligned}$$

Según esto, los incrementos de las coordenadas de un punto  $P_2$  son

$$\Delta x_2 = y_2 dw, \quad \Delta y_2 = -x_2 dw, \quad \Delta z_2 = k dw$$

es decir, el punto se mueve en la dirección:

$$\Delta x_2 : \Delta y_2 : \Delta z_2 = y_2 : (-x_2) : k$$

Las razones del segundo miembro de esta igualdad, son las mismas (3) en que están los cosenos directores de la normal al plano focal. Puede, pues, concluirse, que *si el espacio toma un movimiento helicoidal infinitamente pequeño, alrededor del eje central, de tal modo que su traslación sea igual a  $k$  veces su ángulo de giro (tomado negativamente), se verifica que el plano focal correspondiente a cada punto, es normal a la trayectoria de éste.*

Como esta idea del movimiento helicoidal es muy intuitiva, se obtiene con ella una imagen muy viva de la disposición de los planos del sistema focal. Así, cuanto mayor sea la distancia  $r$  de un punto al eje central, tanto mayor es la proyección horizontal  $rdw$  del elemento de arco que describe en el movimiento helicoidal, tanto más *achatado* es, por tanto, este mismo arco, pues su altura  $k dw$  es constante y tanto más *levantado* el plano focal, perpendicular al elemento de arco.

Sumando infinitos de estos movimientos, resulta un movimiento continuo helicoidal del espacio, en el cual, todo punto de distancia  $r$  al eje describe una *hélice* cuya inclinación, respecto de la horizontal, tiene por tangente  $-\frac{k}{r}$ , y cuyo paso tiene el va-

lor  $2k\pi$ , independiente de  $r$ . Los planos normales a esta hélice son los planos focales del sistema.

Para obtener la representación geométrica de las directrices del sistema, llamemos  $g$  a una de ellas, y construyamos su mínima distancia al eje central (fig. 39), es decir, el segmento que corta perpendicularmente al eje en  $O$  y a  $g$  en  $P$ . Según lo dicho anteriormente el plano focal correspondiente al punto  $P$ , pasa por esta perpendicular  $OP$  al eje y está determinado por ella y la directriz  $g$ ; ahora bien, como ésta es perpendicular a  $OP$ , debe formar con la horizontal el mismo ángulo  $\varphi$  que el plano focal, es decir,  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{k}$ , siendo  $r = OP$ . Según esto, la directriz correspondiente a cada punto  $P$  de una perpendicular al eje central, es otra perpendicular

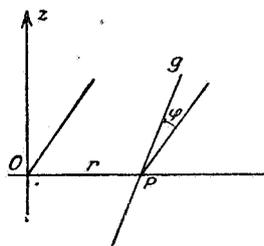


Figura 39

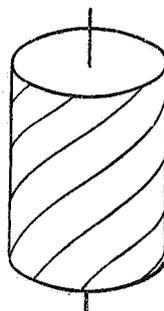


Figura 40

lar a la primera trazada por  $P$ , y que forma con la horizontal un ángulo cuya tangente es  $\frac{r}{k}$ .

Aun puede concebirse esta construcción de este modo, un poco más intuitivo: Construyamos la superficie cilíndrica de revolución, de radio  $r$  y cuyo eje sea el eje central, y tracemos en ella todas las hélices (fig. 40), cuya pendiente respecto del plano horizontal esté determinada por  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{k}$ ; entonces, el conjunto de las tangentes a estas hélices es, evidentemente, el mismo conjunto de las rectas focales cuya distancia al eje central es  $r$ . Haciendo variar  $r$  se obtienen todas las rectas focales. Estas hélices tienen mayor pendiente a medida que están más alejadas del eje

central ; en cada uno de sus puntos, el plano focal es osculador de la hélice, la cual, es por consiguiente, normal a la hélice antes considerada, que corta perpendicularmente al plano focal.

Hechas estas consideraciones, que ponen de manifiesto una doble conexión del sistema focal con las hélices, se comprende que esta teoría se designe abreviadamente como *teoría de las hélices* ; esta denominación ha sido utilizada especialmente por *Robert Ball* en su «*Teorie of screws*» en la que, en efecto, estudia todas las relaciones geométricas relacionadas con un torsor dado aplicado a un sólido fijo.

Pasemos ahora, reanudando el curso de nuestra exposición sistemática, a ver la manera de comportarse las cuatro figuras fundamentales obtenidas mediante el principio de Grassmann en las transformaciones de coordenadas rectangulares.

#### IV. Clasificación de las figuras elementales del espacio atendiendo a su comportamiento en las transformaciones de coordenadas rectangulares

El paso más general de uno a otro sistema de ejes cartesianos en el espacio, puede siempre descomponerse en cuatro transformaciones, a saber :

- 1) Traslación paralela ;
- 2) Giro alrededor del origen ;
- 3) Simetría ;
- 4) Cambio de unidad.

Las ecuaciones de la *traslación* y del *giro*, son, respectivamente :

$$(A_1) \quad x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c$$

$$(A_2) \quad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

El conjunto de los productos de todas las transformaciones posibles de estas dos clases constituye la totalidad de los *movimientos propios del sistema de coordenadas*.

La *simetría respecto de uno de los planos coordenados*, por ejemplo, el *xy*, tiene por ecuaciones :

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = -z$$

Estas mismas fórmulas se pueden escribir en forma más simétrica, con tres signos negativos:

$$(A_3) \quad x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z$$

y representan entonces, la *simetría respecto del origen O*, que también toma el nombre de *inversión* (\*). En el plano  $x' = -x$ ,  $y' = -y$ , representan simplemente un giro de  $180^\circ$ ; en general, la inversión respecto del origen, es un giro en los espacios de número par de dimensiones y una verdadera simetría (\*\*\*) en los de número impar de dimensiones.

Finalmente, el cambio de unidad se efectúa por medio de

$$(A_4) \quad \begin{cases} x' = \lambda x, \\ y' = \lambda y, \\ z' = \lambda z, \end{cases} \quad \text{donde } \lambda > 0;$$

si  $\lambda < 0$ , además del cambio de unidad, hay una simetría.

Vamos a comenzar por el estudio de los *giros* alrededor del origen. Sus ecuaciones dependen de *tres parámetros*, porque la amplitud es arbitraria, y de los tres cosenos directores del eje de giro, solamente dos son independientes.

Una exposición simétrica de todos los giros, mediante tres parámetros independientes puede hacerse con la *teoría de los cuaternios* de que incidentalmente nos ocupamos en el otro curso (\*\*\*) ; las fórmulas a que así se llega fueron, por otra parte, ya establecidas por Euler. Aquí trataremos la cuestión como ordinariamente se hace en los cursos de Mecánica, utilizando los nueve cosenos directores de los ejes nuevos, respecto de los antiguos. Partimos de las ecuaciones de transformación :

$$(1) \quad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

(\*) La palabra *inversión* se aplica también algunas veces a la transformación por radios vectores recíprocos.

(\*\*) El autor quiere así distinguir como simetrías propiamente tales las que conducen a figuras no superposibles. (N. del T.)

(\*\*\*) Véase tomo I, pág. 75.

Sea un punto  $x, y=0, z=0$  del antiguo eje  $x$ . Sus coordenadas en el nuevo sistema, serán  $x'=a_1x, y'=a_2x, z'=a_3x$ ; es decir, que  $a_1, a_2, a_3$  son los cosenos de los ángulos que forman los nuevos ejes con el  $x$  del primer sistema. Análogamente ocurre con  $b_1, b_2, b_3$ , y  $c_1, c_2, c_3$ , respecto a los ejes  $y, z$ .

Estos nueve coeficientes no son independientes entre sí, sino que existen entre ellos ciertas relaciones, fáciles de obtener de la interpretación geométrica y también de la conocida ecuación:

$$(2) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

que queda satisfecha en toda *sustitución ortogonal*; es decir, en toda simetría o giro que deje invariable el origen de coordenadas. Esta ecuación no expresa otra cosa que la invariancia de la distancia del punto al origen.

α) De (1) y (2), se obtienen las siguientes relaciones entre las nueve cantidades  $a_1, \dots, c_3$ :

$$(3) \quad \begin{cases} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0, & c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0, & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \end{cases}$$

β) Multiplicando las ecuaciones (1) por las tres cantidades  $a$ , las tres  $b$  y las tres  $c$ , sumando los resultados y teniendo en cuenta las tres, resulta:

$$(4) \quad \begin{cases} x = a_1x' + a_2y' + a_3z' \\ y = b_1x' + b_2y' + b_3z' \\ z = c_1x' + c_2y' + c_3z' \end{cases}$$

que, como se ve, es la *sustitución lineal traspuesta* de la (1), que se obtiene cambiando filas por columnas en la matriz de los coeficientes).

γ) Según las reglas de la teoría de determinantes, la solución de las ecuaciones (1) es:

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x' & b_1 & c_1 \\ y' & b_2 & c_2 \\ z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{etc., donde } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

y, como el coeficiente de  $x'$  debe ser el mismo que en (4), es preciso que sea :

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1,$$

lo que nos dice, que *todo coeficiente de la sustitución ortogonal, es igual a su menor complementario en el determinante de los coeficientes, dividido por el determinante  $\Delta$ .*

2) Para calcular el determinante  $\Delta$  de los coeficientes, formemos su cuadrado, que según la teoría de multiplicación de determinantes es :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 & c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{vmatrix}$$

y aplicando las fórmulas (3), resulta :

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

de donde,

$$\Delta = \pm 1.$$

Para decidir cuál de estos dos valores debe aceptarse, hay que tener en cuenta que hasta ahora hemos utilizado solamente la ecuación (2), que se satisface, tanto para un giro, como para una simetría. Dentro de estas transformaciones ortogonales, *los giros se caracterizan por obtenerse por variación continua de los coeficientes de la transformación idéntica  $x'=x$ ,  $y'=y$ ,  $z'=z$ , y las simetrías, por una variación también continua de una inversión  $x'=-x$ ,  $y'=-y$ ,  $z'=-z$ ; es decir, los giros por un movimiento sin solución de continuidad del sistema de ejes coordenados, que los lleva de la primera a la*

segunda posición, mientras que, la transformación inversa no puede obtenerse de la idéntica por un movimiento continuo. Ahora bien, siendo el determinante una función continua de los coeficientes, debe variar también continuamente al pasar de la transformación idéntica a un giro cualquiera; pero, en esta transformación inicial,  $\Delta$  tiene el valor:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +1$$

y, como según vimos tiene que ser  $+1$  ó  $-1$ , necesariamente será  $+1$ , pues, el paso al valor  $-1$  implicaría una discontinuidad. Por lo tanto, *en todo giro, el determinante de los coeficientes es:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +1 \quad (6)$$

y, análogamente resulta que en toda simetría es  $\Delta = -1$ .

La fórmula (5), toma así la forma:

$$a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$

que expresa que *en todo giro, cada coeficiente de la sustitución del sistema de coordenadas rectangulares, es igual a su respectivo menor complementario en el determinante  $\Delta$ .*

Pasemos ahora, a estudiar cómo influyen estas transformaciones en las magnitudes geométricas elementales definidas en el capítulo anterior, el vector  $X, Y, Z, L, M, N$ , el área plana  $l, m, n, p$ , y, finalmente, el elemento de espacio  $T$ .

La aplicación de todas las fórmulas de transformación de coordenadas, requeriría largo espacio y enojosos cálculos; por lo cual haremos solamente resaltar algunos puntos que presentan un interés especial. En primer lugar, se observa que las coordenadas  $X', Y', Z'$  de un vector, después de una transformación cualquiera, están expresadas en función únicamente de las coordenadas  $X, Y, Z$  antiguas, sin que aparez-

can las  $L, M, N$ ; es decir que según el principio de Grassmann, el conjunto de las tres cantidades  $X, Y, Z$ , determina una forma geométrica independiente de los ejes de coordenadas, o sea, un vector libre. Análogamente,  $l, m, n$  (descartando  $p$ ), determinan otra forma geométrica independiente del sistema de ejes, que es la que anteriormente hemos llamado *área plana libre*.

Aplicando las fórmulas  $(A_1), \dots, (A_4)$ , a las coordenadas  $X, Y, Z$ , de un vector libre, para lo cual basta sustituir en  $X' = x'_1 - x'_2, \dots$  los  $x'_1, \dots$  por sus valores  $(A_2)$  en función de  $x, y, z$ , se obtiene:

1) En la traslación:

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z \quad (B_1)$$

2) En el giro:

$$\begin{cases} X' = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z \\ Y' = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z \\ Z' = a_3 X + b_3 Y + c_3 Z \end{cases} \quad (B_2)$$

3) En la inversión:

$$X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = -Z \quad (B_3)$$

4) En el cambio de unidad:

$$X' = \lambda x, \quad Y' = \lambda y, \quad Z' = \lambda z \quad (B_4)$$

Así, pues, las coordenadas del vector, permanecen invariables únicamente en la traslación; en las demás transformaciones se comportan exactamente lo mismo que las coordenadas de puntos.

Si se trata de un par de fuerzas basta hacer en estas fórmulas  $x=y=z=0$ , con lo cual resulta  $X'=Y'=Z'=0$ . Para los momentos respecto a los nuevos ejes, se obtienen las fórmulas siguientes:

1) En la traslación:

$$L' = L, \quad M' = M, \quad N' = N \quad (C_1)$$

2) En el giro :

$$\begin{cases} L' = a_1 L + b_1 M + c_1 N \\ M' = a_2 L + b_2 M + c_2 N \\ N' = a_3 L + b_3 M + c_3 N \end{cases} \quad (C_2)$$

3) En la inversión :

$$L' = L, \quad M' = M, \quad N' = N \quad (C_3)$$

4) En el cambio de unidad :

$$L' = \lambda^2 L, \quad M' = \lambda^2 M, \quad N' = \lambda^2 N \quad (C_4)$$

luego, las coordenadas de un par de fuerzas no varían en la traslación ni en la inversión; en el giro se transforman como las coordenadas de un punto, y en el cambio de escala quedan multiplicadas por el factor  $\lambda^2$ , es decir, tienen la dimensión 2 (de un área), mientras el vector libre, como las coordenadas de un punto, tiene la dimensión 1.

La obtención de las fórmulas  $(C_1)$ ,  $(C_3)$ ,  $(C_4)$  no presenta ninguna dificultad. Para llegar a la  $(C_2)$  se parte de la  $(A_2)$  del giro, de la cual se deduce :

$$L' = \begin{vmatrix} y'_1 & z'_1 \\ y'_2 & z'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1 & a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3 z_1 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2 z_2 & a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3 z_2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando este determinante, resultan  $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18$  términos, de los cuales tres pares, por ejemplo,

$$(a_2 x_1 \cdot a_3 x_2 - a_3 x_1 \cdot a_2 x_2)$$

se anulan. Los doce términos restantes pueden escribirse en la siguiente forma :

$$L' = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Los factores que ocupan el primer lugar de cada producto, son menores del determinante de los coeficientes, y, por lo tanto, iguales a  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ , según la fórmula [7] del giro; y los segundos factores son iguales a  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , respectivamente, luego :

$$L' = a_1 L + b_1 M + c_1 N$$

que es la primera de las fórmulas ( $C_2$ ). Exactamente igual se obtienen las otras dos.

Procediendo de un modo análogo para el *área plana libre*, se deduce que *las componentes  $l, m, n$ , de un área plana libre, se transforman del mismo modo que las coordenadas  $L, M, N$  de un par de fuerzas.*

Los resultados obtenidos pueden resumirse en la tabla siguiente :

	Traslación	Giro	Inversión	Cambio de escala
Vector libre	$X$	$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z$	$-X$	$\lambda X$
Par de fuerzas	$L$	$a_1 L + b_1 M + c_1 N$	$L$	$\lambda^2 L$
Área plana libre	$l$	$a_1 l + b_1 m + c_1 n$	$l$	$\lambda^2 l$

Estas fórmulas pueden servir de base para establecer algunas propiedades geométricas que en la generalidad de los libros, o faltan en absoluto, o están expuestas en una forma que no deja adivinar su verdadero significado geométrico. Frecuentemente, las figuras geométricas que consideramos no se presentan tan claramente expresadas como aquí, y con ello se dificulta la obtención de una serie completa de interesantes relaciones. Así, por ejemplo, en la obra de Poinsot, los conceptos de par de fuerzas (couple) y área plana libre («aire») desde el primer momento aparecen entremezclados, lo cual necesariamente dificulta la comprensión; para nosotros ya aquí, la comparación de las dos últimas filas de la tabla permite, atendiendo a un principio general anteriormente citado, *considerar un par de fuerzas y un área plana como formas geométricas de la misma especie*, puesto que se comportan del mismo modo en una transformación cualquiera del sistema de coordenadas rectangulares.

Para esclarecer completamente el significado de esta propiedad, consideremos un par de fuerzas dado  $L, M, N$ , y hagámosle corresponder un área plana  $l, m, n$ , de manera que sea

$$l=L, \quad m=M, \quad n=N$$

(o hagamos lo mismo en sentido contrario, partiendo de  $L, M,$

$N$ ); esta igualdad de valores de sus coordenadas subsiste en cualquier cambio de ejes, luego debe poder exponerse de una manera geométrica pura sin recurrir a los sistemas de coordenadas.

Para lograrlo, vamos a partir del  $l$ ,  $m$ ,  $n$  y por razón de comodidad tomemos un sistema particular de coordenadas, de manera que  $l=m=0$ , con lo cual el área es un triángulo  $(1, 2, 3)$  paralelo al plano  $xy$  o situado en él; es decir, la mitad del paralelogramo  $(1, 1', 2, 3)$ , tomado precisamente en este sentido (fig. 41). Vamos a ver que el par de fuerzas correspondiente que tiene los momentos  $L=M=0$ ,  $N=N$  puede considerarse como formado por dos fuerzas de sentidos opuestos,

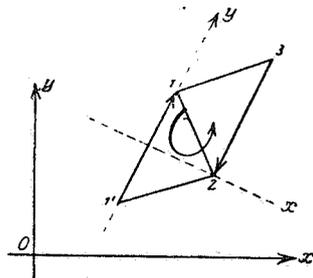


Figura 41

colocadas en dos lados opuestos del paralelogramo  $(1, 1')$  y  $(2, 3)$ . La demostración es fácil tomando como eje  $y$  la recta  $11'$  y como eje  $x$ , la perpendicular a ella trazada por el punto 2 (representada en la figura 41 con una línea de trazos), con lo cual tanto los dos vectores  $(1, 1')$  y  $(2, 3)$ , como el par de fuerzas que representan, tiene por momentos  $L=0$ ,  $M=0$ . Además, el vector  $(1, 1')$  tiene nulo el tercer momento, de modo, que  $N$  es igual al momento del otro vector  $(2, 3)$ ; es decir,

$$N = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3$$

(puesto que según la hipótesis  $x_2=x_3$ ,  $y_2=0$ ). Por otra par-

te, la tercera coordenada  $n$  del área plana, es en el sistema de ejes elegido :

$$n = \begin{vmatrix} 0 & y_1 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_2 \cdot y_3,$$

es decir, igual al producto de la base  $y_3$  por la altura  $x_2$  del paralelogramo; luego en efecto, en valor absoluto y en signo es

$$N = n$$

como queríamos demostrar.

Este resultado puede expresarse de modo general, sin tener en cuenta el sistema de coordenadas, diciendo que *un área plana representada por un paralelogramo de sentido determinado y un par fuerzas representadas por dos lados opuestos del mismo paralelogramo y tomadas en sentido contrario al de éste, son formas geométricas equivalentes; es decir, tienen sus componentes iguales, respecto de cualquier sistema de ejes rectangulares.*

En virtud de este teorema, los conceptos de *par de fuerzas* y *área plana*, pueden sustituirse mutuamente uno por otro en todas las cuestiones en que intervengan, y en consecuencia, prescindir de la segunda fila que hemos formado y limitarnos a comparar la primera línea y la tercera, o sea el *vector libre* y el *área plana libre*.

Demostremos en primer lugar, que ambas se comportan del mismo modo respecto de las traslaciones y giros, pero no en las simetrías ni en los cambios de unidad. Consideremos para ello, en un sistema de ejes rectangulares directo, un área plana  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , y el vector libre que tenga las coordenadas :

$$X=l, \quad Y=m, \quad Z=n$$

Estas igualdades subsistirán cuando nos limitemos a movimientos del sistema de coordenadas, pero se modificarán en los casos de simetrías o cambios de escala, y, por consiguiente, si queremos expresarlo geoméricamente, no lo lograremos sin utilizar el sentido del sistema coordenado y la escala. En efecto, eligiendo los ejes de modo que se verifique  $l=m=0$

y que  $n$  sea igual al área del paralelogramo (1, 1', 2, 3) situado en el plano  $xy$  (fig. 42), se tiene  $n > 0$ , y el vector  $X=0$ ,  $Y=0$ ,  $Z=n$  coincide con el sentido positivo del eje  $z$ . Estos hechos pueden evidentemente, expresarse con independencia de la posición especial de los ejes, diciendo que *para obtener en un sistema de ejes rectangulares, un vector libre que tenga por coordenadas las de un área plana libre dada, se traza una perpendicular al plano de ésta, y sobre ella se toma una longitud igual al área del paralelogramo, del lado desde el cual se vea el sentido en que se recorre dicho paralelogramo, en sentido contrario al del movimiento de las agujas de un reloj.*

Según esto, las coordenadas del vector y las del área plana, continúan siendo iguales aunque se efectúe una traslación

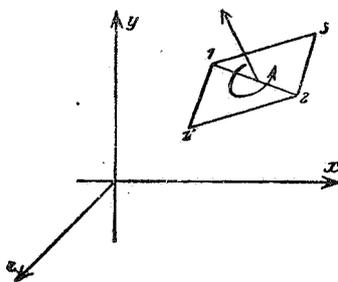


Figura 42

o un giro del sistema de coordenadas, pero no sucede lo mismo si se cambia de unidad, porque, si en vez de medir, por ejemplo, en centímetros, lo hacemos en decímetros, el área se reduce a su centésima parte, mientras que el vector sólo se hace diez veces menor. En una inversión tampoco se conserva la igualdad, porque el vector cambia de signo, pero el área conserva el suyo. Así pues, vector libre y área plana libre, únicamente pueden considerarse como idénticos, cuando de una vez para siempre se hayan fijado, tanto el sentido del sistema de coordenadas, como la unidad lineal de medida. Esta limitación introduce una arbitrariedad que debe ser tenida en cuenta, aun cuando no siempre se haga mención explícita de ella. Como se ve, todas estas cosas son sumamente claras y sencillas, y sin embargo, hay que volver siempre sobre ellas, porque en la Física actual,

no pocas veces ha dejado la exposición histórica una cierta confusión. Vamos, por esto, a decir alguna palabra sobre la historia de estas cuestiones.

El «*Tratado de la extensión*» de Grassmann, a causa de su difícil lectura, ha influido muy poco en la Física y en la Mecánica. Mucha mayor influencia tuvo en Inglaterra la obra de *Hamilton*, el creador de los *cuaternios* (véase primer tomo, página 75). Este fué el primero que usó la palabra *vector*, para designar lo que nosotros hemos llamado *vector libre*, pues en su obra no aparece de una manera explícita el concepto de vector fijo. Tampoco hizo ninguna distinción entre área plana y vector, porque imaginó fijados de antemano, el sentido de los ejes y la unidad de medida, y este descuido ha penetrado en la Física, en la cual ambos conceptos han sido confundidos durante largo tiempo. Poco a poco, a medida que fueron afinándose las investigaciones, se sintió la necesidad de una distinción, atendido el diferente comportamiento de figuras designadas con el nombre genérico de vectores, respecto de las inversiones, y para ello se utilizan los calificativos de *polar* y *axial*, diciendo: *Un vector polar cambia su signo en las simetrías, y, por tanto, es idéntico al que hemos llamado vector libre, y un vector axial no cambia, y, por consiguiente, coincide con nuestra área plana libre* (con lo cual, en nada se toca al concepto de «dimensión»). Es natural, pues, que la Física mostrase en este punto una cierta sorprendente diferenciación (y así lo hace todavía hoy, en los libros corrientes), que en nuestra concepción general aparece así de manera muy natural, desde el primer momento. Precisemos más esto con un ejemplo: Decir que el campo eléctrico es un vector polar, significa que está medido por tres magnitudes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , que se transforman como indica la primera línea de nuestra tabla (pág. 62); y que la intensidad de un campo magnético es un vector axial, quiere decir, que los tres parámetros que la determinan son sustituidos con arreglo a la última línea de dicha tabla. Naturalmente, nada decimos acerca de dimensión de estos parámetros, pues esto nos obligaría a entrar en muchos pormenores de Física.

Hamilton ha usado junto a la palabra *vector*, también la de *escalar*, que asimismo todavía hoy desempeña en la Física

un gran papel. *Un escalar, no es otra cosa que un invariante respecto a todas las transformaciones de coordenadas, esto es, una magnitud que no varía, salvo, si acaso, un factor, en cualquier cambio de ejes coordenados; según lo cual, pueden distinguirse diferentes modalidades dentro del concepto de escalar.* Consideremos primero, como ejemplo, el volumen de un tetraedro :

$$T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

el cual se transforma de la siguiente manera, como se ve efectuando el cálculo correspondiente.

En virtud de:	Traslación	Giro	Inversión	Cambio de unidad
se transforma en	$T$	$T$	$-T$	$\lambda^3 T$

Todas las magnitudes que, como ésta permanecen invariables en las traslaciones y giros, pero que cambian de signo en las simetrías, se llaman *escalares de segunda especie*, considerándose como de *primera especie*, las que tampoco cambian en la inversión. En esta clasificación, se prescinde como antes de la dimensión que resulta de la cuarta columna.

También pueden formarse fácilmente *escalares de primera especie*. Los ejemplos más sencillos son,  $X^2 + Y^2 + Z^2$ , siendo  $X, Y, Z$ , las coordenadas de un vector libre y  $l^2 + m^2 + n^2$ , siendo  $l, m, n$  las de un área plana. Estas expresiones son invariantes en todos los movimientos y simetrías (no en los cambios de unidad), como se comprueba fácilmente por medio de la tabla de la página 62, teniendo en cuenta, además, las ecuaciones (3) de la página 57, para los coeficientes del giro. La invariancia de ambas expresiones hace presumir que tengan una significación geométrica, lo cual ocurre efectivamente, pues la primera representa el cuadrado de la longitud de un vector, y la segunda, el de un área plana.

Vamos a mostrar ahora, que *combinando entre sí las formas fundamentales que hemos definido (vectores y escalares*

de primera y segunda especie), se pueden obtener nuevas formas con caracteres análogos. Sean, por ejemplo,  $T$  el volumen de un tetraedro, o sea, un escalar de segunda especie, y  $X, Y, Z$  las coordenadas de un vector polar. Los productos  $TX, TY, TZ$  se transforman en virtud de los movimientos, del mismo modo que las coordenadas, pero permanecen invariables en las inversiones, puesto que ambos factores cambian de signo. Los tres productos representan por lo tanto, un vector *axial*. Del mismo modo, partiendo de las coordenadas de un vector *axial*  $l, m, n$ , se obtienen las de uno *polar*  $Tl, Tm, Tn$ . Con dos vectores polares  $X_1, Y_1, Z_1$  y  $X_2, Y_2, Z_2$ , se pueden formar las siguientes combinaciones:

1) Las sumas:

$$X_1 + X_2, \quad Y_1 + Y_2, \quad Z_1 + Z_2$$

que como se transforman del mismo modo que sus sumandos, representan un nuevo *vector polar*, cuyas relaciones geométricas con los dados, son independientes del sistema de coordenadas.

2) La combinación bilineal de los componentes de los dos vectores:

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

que, como el cálculo muestra, permanece invariable en todos los movimientos e inversiones, representa, por consiguiente, un *escalar de primera especie*, que como tal, es susceptible de ser geoméricamente definido.

3) Los tres menores de la matriz rectangular:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

se comportan del mismo modo que las coordenadas de un vector axial y están también ligados a los vectores dados por relaciones independientes del sistema de coordenadas.

4) Por último, con las componentes de tres vectores polares, se puede formar el determinante:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

que permanece invariable en todos los movimientos, pero cambia de signo en las inversiones, de modo que representa un *escalar de segunda especie*.

La representación geométrica de las formas que acabamos de obtener es la siguiente:

1.º La suma de dos vectores, se representa, como es sabido, por la diagonal del paralelogramo que con ellos puede formarse (fig. 43). (Regla del «paralelogramo de las fuerzas»).

2.º La combinación bilineal de dos vectores, es igual a  $r_1 r_2 \cos \varphi$  (fig. 44), siendo  $r_1$  y  $r_2$  sus respectivas longitudes y  $\varphi$  el ángulo que forman.

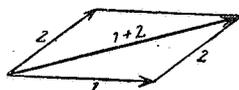


Figura 43

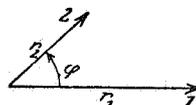


Figura 44

3.º Los menores de la matriz representan *el área de un paralelogramo de lados paralelos a ambos vectores, recorrido en el sentido que ellos indican* (fig. 45). El valor absoluto de dicha área es  $r_1 r_2 \sin \varphi$ .

4.º En cuanto al escalar de segunda especie que define el determinante formado por los componentes de tres vectores, equivale geoméricamente al volumen (con el signo que le corresponda), del paralelepípedo construído sobre dichos vectores, tomados a partir de un mismo punto (fig. 46).

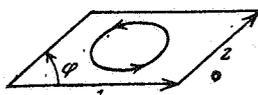


Figura 45

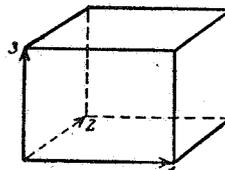


Figura 46

En la literatura matemática, no se sigue por lo común este procedimiento de investigar las relaciones que existen entre ciertas expresiones analíticas, respecto de las transformaciones de coordenadas, partiendo de la teoría de invariantes. Por el contrario, en la Mecánica y en la Física, se ha formado un

tecnicismo llamado *análisis vectorial*, derivado de los procedimientos de Grassmann y Hamilton, que se funda en comparar la formación de nuevos elementos a base de vectores y escalares, con las operaciones elementales entre números. Así, la operación del número 1.º se acostumbra designarla con el erróneo nombre de *adición de los vectores 1 y 2*, justificándolo con el hecho de que satisface a las leyes formales de la suma y especialmente a la conmutativa y asociativa. Las operaciones de los números 2.º y 3.º se consideran ambas como multiplicaciones, llamándose a la primera, *multiplicación interna o escalar*, y a la segunda, *externa o vectorial*. En la interna se verifica que :

$$\begin{aligned} X_1(X_2 + X_3) + Y_1(Y_2 + Y_3) + Z_1(Z_2 + Z_3) = \\ = (X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2) + (X_1X_3 + Y_1Y_3 + Z_1Z_3) \end{aligned}$$

y análogamente en la externa, de modo que, las dos son distributivas respecto de la adición. En cuanto a la ley conmutativa, se verifica solamente para la multiplicación interna, puesto que los menores de la matriz rectangular que define el producto vectorial, cambian de signo cuando se permutan los vectores 1 y 2. El resultado del producto de dos vectores polares, acostumbraba designarse con el nombre de *vector*, sin poner de manifiesto su carácter *axial*. Claro es, que en virtud de lo dicho

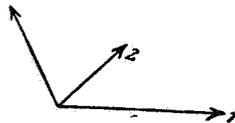


Figura 47

en la página 65, se puede sustituir inmediatamente el área plana por un vector y enunciar la regla siguiente: *El producto externo de dos vectores 1 y 2, es un vector 3 de longitud igual a  $r_1r_2[\text{sen } \varphi]$ , perpendicular al plano 12 y de tal sentido, que 1, 2 y 3 están dispuestos del mismo modo que los ejes x, y, z (figura 47), pero no debe olvidarse en ningún caso, que esta definición depende esencialmente de la disposición de los ejes y de la unidad elegida.*

La razón de usarse estos nombres no es muy comprensible

y sólo puede achacarse a lo agradable que resulta para muchos, poder establecer analogías con las operaciones numéricas ordinarias. El hecho es, que estas denominaciones están aceptadas por todos, habiéndose sólo producido divergencias, al tratarse de la notación simbólica aplicable a las operaciones con vectores, especialmente en lo relativo a la distinción entre las dos multiplicaciones. En otro lugar (\*), hemos dicho cuán lejos estamos de llegar a un acuerdo en estos puntos, a pesar de todos los esfuerzos realizados. Recientemente, en el Congreso de matemáticos de Roma, se constituyó una comisión internacional encargada de proponer una notación uniforme, pero, aunque en el seno de la comisión se haya llegado a un acuerdo, habrá que esperar para ver si todos los matemáticos lo aceptan. Es siempre una cosa extraordinariamente difícil lograr que un gran número de hombres, que sólo quieren seguir lo que para ellos es más cómodo por propia costumbre, se allanen a aceptar otra cosa, como no sea por una coacción legislativa o por un interés material común. Y prefiero no hablar más de la notación vectorial, para evitar que surja otra nueva. Antes de dar por terminado este párrafo, conviene hacer notar, que el análisis vectorial, no es, mirado desde el punto de vista general en que nos hemos colocado, más que una parte mínima de un conjunto de problemas más generales.

Entre la literatura referente a las cuestiones que acabamos de tratar, son dignas de mencionarse la memoria en que últimamente he expuesto el principio general de clasificación «*Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball (\*\*)*», así como un artículo de E. Timerding en la Enciclopedia (tomo IV, 2; *Geometrische Grundlangen der Mechanik starren Körpers*) y otro de M. Abraham: «*Geometrische Grundbegriffe der Mechanik deformierbarer Körper*», Enciclopedia, tomo IV, 14.

## V. Formas derivadas de las fundamentales

Conseguido ya nuestro objeto de estudiar las *figuras elementales* de la Geometría, vamos a tratar ahora de figuras de categoría superior que pueden deducirse de aquéllas. Adoptaremos

(\*) Tomo I, pág. 84.

(\*\*) Zeitschrift für Math, u Phys, 47, pág. 237 y sig., y Math. Ann, 62, pág. 419. F. Klein, Ges. Math. Abhdlgn. I, pág. 583.

en la exposición un orden histórico, lo cual tiene la ventaja de hacer ver el desarrollo que ha tenido la Geometría en el curso de los siglos.

A) Hasta finales del siglo XVIII, *solamente los puntos eran considerados como figuras elementales*, y si las demás intervenían alguna vez, era ocasionalmente y no de un modo sistemático. Las *curvas y superficies*, se consideraban como engendradas por puntos, y lo mismo las *configuraciones* o figuras compuestas de trozos de distintas curvas o superficies.

Con estos nombres pueden ser designadas multitud de cosas que brevemente vamos a enumerar.

1) En la *enseñanza elemental*, y a veces también en los comienzos de la Geometría Analítica, se procede como si toda la Geometría se limitase a las *rectas, planos, curvas y superficies de segundo orden*. Este punto de vista es modestísimo, y ya entre los griegos se llegaron a estudiar algunas curvas de orden superior, consideradas entonces como *lugares geométricos*, si bien es justo consignar, que tampoco se incluían comúnmente en la enseñanza ordinaria.

2) Hacia 1650 se registra, unida a los nombres de *Fermat* y *Descartes*, la aparición de la Geometría Analítica. En esta época, se distinguían dos especies de curvas: *geométricas y mecánicas*. El primer grupo lo formaban, principalmente, las cónicas, pero también algunas de las que hoy llamamos *curvas algebraicas*; y con el segundo nombre se designaban todas aquellas que pueden definirse por medio de un *mecanismo*, tales como la *cicloide*, que puede considerarse engendrada por el movimiento de una rueda; la mayoría de estas curvas son *trascendentes*.

3) Ambas especies pueden agruparse bajo la denominación común de *curvas analíticas*, introducida más tarde, por el hecho de que *las coordenadas cartesianas de sus puntos son funciones analíticas de un parámetro t*, es decir, pueden representarse por series de potencias de dicho parámetro.

4) Modernamente se ha prestado un gran interés a las *curvas no analíticas*, que son aquellas cuyas coordenadas  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$ , no son desarrollables en serie de potencias, por ejemplo, en funciones continuas sin derivada. Esta ampliación de

la idea de curva, corresponde a *un concepto general de línea, que comprende al de curva analítica, como caso particular.*

5) Por último, el desarrollo de la teoría de conjuntos ha venido a introducir un nuevo ente: el *conjunto infinito de puntos*, que si bien no es una curva propiamente dicha, puede ser definido con arreglo a una ley determinada. Una idea intuitiva de lo que son tales conjuntos, se obtiene pensando, p. ej., en que en la Vía láctea se descubren cada día nuevas estrellas, a medida que se va aumentando la potencia de los medios de observación. Claro es, que en esta imagen, el concepto exacto de infinito del conjunto de puntos, está sustituido por el infinito de la Matemática aproximada.

Las disciplinas citadas en esta rápida enumeración, en particular la *Geometría infinitesimal* y la *teoría de conjuntos*, no pueden desgraciadamente tener cabida en este libro, a pesar de la importancia que tienen. A ellas se han dedicado numerosos tratados especiales, por cuya causa nos limitamos a esta referencia respecto del lugar que hoy ocupan en los estudios geométricos, y pasamos a tratar de otras cosas algo raras de encontrar en la literatura matemática.

Ante todo, quisiera yo examinar la *diferencia entre Geometría analítica y sintética*. En su primitivo significado, las palabras análisis y síntesis, se refieren a dos diferentes métodos de exposición. La síntesis comienza por examinar casos particulares, de los cuales pasa poco a poco a conceptos generales. El análisis, por el contrario, empieza por lo más general, procediendo después por descomposición. Correspondiendo a este punto de vista, es como se han establecido las denominaciones de Química analítica y sintética.

También en la Geometría escolar se acostumbra hablar de un *Análisis de las construcciones geométricas*, cuyo prototipo es el siguiente: Consideremos el triángulo buscado como conocido, descompongámosle en cada una de sus partes, etc.

En la Matemática superior, estas palabras tienen otro significado muy distinto, pues se llama *Geometría sintética*, aquella en la cual las figuras se estudian en sí mismas sin intervención alguna de fórmulas, mientras que en la analítica éstas se aplican constantemente mediante el uso de los sistemas de coordenadas.

En realidad, la diferencia entre ambas especies de Geometría es puramente cuantitativa: según que predominen las fórmulas o las figuras, se tiene una u otra Geometría, ya que una Geometría analítica no puede, sin perder su nombre, prescindir en absoluto de la representación geométrica, ni, por el contrario, la Geometría sintética puede ir muy lejos sin expresar de un modo preciso, con fórmulas adecuadas, sus resultados. Pero como ocurre siempre que se trata de algo opinable, los matemáticos se han dividido en dos bandos, que han dado origen a las *escuelas sintética pura y analítica pura*, basadas ambas exclusivamente en la *pureza del método* y no en la naturaleza de las cosas que se estudian, lo cual conduce a que los geómetras analíticos se pierdan a menudo en un cálculo ciego, sin representación geométrica alguna, y los sintéticos eviten artificialmente el uso de toda fórmula. Este modo de exagerar los principios fundamentales de las dos escuelas, conduce siempre a un *cierto proceso de fosilización*, pero hoy domina el anhelo, provocado, en su mayor parte, por los «outsidern», de prescindir de esos exagerados purismos en favor del progreso de la ciencia. Así, por ejemplo, en la Geometría, los cultivadores de la teoría de funciones han establecido con toda claridad la distinción entre curvas analíticas y no analíticas, que no han hecho resaltar de un modo suficiente, ni los representantes científicos de ambas escuelas, ni los libros de texto que siguen sus respectivas tendencias. Lo mismo puede decirse del análisis vectorial, que a pesar de ser ampliamente utilizado por los físicos, no tiene apenas cabida en los tratados de Geometría, a pesar de que los conceptos fundamentales se encuentran ya en Grassmann.

No es raro encontrar quien crea que la Geometría debe formar dentro de la Matemática un campo aparte en la enseñanza, y aún más, que en ésta cada disciplina matemática debe estudiarse aisladamente, y, en efecto, en los establecimientos de enseñanza superior, no alemanes, hay profesores especiales de Geometría, de Álgebra, de Cálculo infinitesimal, etc.

Como resumen de estas consideraciones, diremos que no nos parece recomendable una separación demasiado exclusivista de las diferentes disciplinas, sino que, por el contrario, cree-

mos mucho más fructífero no solamente dejar que entre unas y otras ramas de la Matemática se ejerza una vivificadora influencia mutua, sino también establecer un mayor intercambio de ideas entre los matemáticos y los representantes de las demás ciencias.

Terminada esta pequeña digresión, vamos a seguir ocupándonos del desarrollo histórico de la Geometría.

B) El impulso más poderoso que ha recibido la investigación geométrica, comienza en 1800, con la aparición de la llamada entonces *Geometría moderna*, calificativo hoy caído en desuso, porque, naturalmente, existen otras tendencias aún más modernas. Actualmente se la llama *Geometría proyectiva* por la importancia que en ella tiene la operación de proyectar.

El primer investigador que dirigió sus esfuerzos en este sentido, fué *Poncelet*, con su *Traité des propriétés projectives des figures*, aparecido en 1822 (\*).

En el desarrollo ulterior de esta Geometría se han marcado también las dos direcciones correspondientes a los consabidos métodos sintético y analítico. Los representantes de la primera son *Steiner* y *Staudt*, y los de la segunda *Möbius*, y sobre todo *Plücker*. Sus obras fundamentales son las siguientes: *Steiner*, «Estudio sistemático de la dependencia mutua de las formas geométricas» (\*\*).

*Staudt*, «Geometría de la posición» (\*\*\*) .

*Möbius*, «Cálculo baricéntrico» (\*\*\*\*).

*Plücker*, «Estudios analítico-geométricos» (\*\*\*\*\*).

Estudiaremos ahora, los puntos de vista especiales que caracterizan esta nueva Geometría.

1) La idea directriz de *Poncelet*, consiste en considerar como formas fundamentales, no solamente el punto, sino también la recta en el plano y el plano en el espacio y en hacer notar, que en un gran número de teoremas puede sustituirse la palabra *punto* por la de *recta* o *plano* y recíprocamente. Esto es lo

(\*) Segunda edición, París, 1863-66.

(\*\*) *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Berlín, 1832. Ges Werke Bel, 1. (Berlín, 1881).

(\*\*\*) *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1846.

(\*\*\*\*) *Barycentrischer Kalkül* ya citado.

(\*\*\*\*\*) *Analytisch - geometrische Entwicklungen*, dos tomos. Essen 1828-1831.

que constituye la esencia del *principio de correlación o dualidad*.

Poncelet basa la exposición de su *Théorie des polaires réciproques* en la *polaridad respecto de las cónicas*. Respecto a una cónica determinada, a cada punto  $p$  (fig. 48) corresponde, como es sabido, una recta  $\pi$ , que cuando  $p$  es exterior, es la recta determinada por los puntos de contacto de las dos tangentes que pasan por dicho punto y recíprocamente, a toda recta  $\pi$  le corresponde un polo  $p$ ; esta correspondencia es una *relación de reciprocidad tal*, que la polar  $\pi'$ , de un punto  $p'$  de la recta  $\pi$  pasa por el polo  $p$ . De esta correspondencia especial entre puntos y rectas, así como de su análoga en el espacio entre puntos y planos que se deduce de la polaridad respecto de una cuádrica, concluye

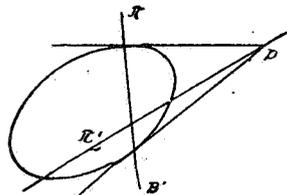


Figura 48

Poncelet que *todos los teoremas geométricos que se refieren a relaciones de posición entre puntos, rectas y planos, son susceptibles de que se les aplique el «principio de correlación»* (\*). Un ejemplo notable, lo constituye el conocido *teorema de Pascal* sobre el hexágono inscrito en una cónica, que en virtud de una correlación, se transforma en el *teorema de Brianchon*, relativo al hexágono circunscrito.

2) Posteriormente, el principio de correlación desligándose de la teoría de polaridad se ha generalizado, llegando a constituir uno de los elementos característicos de la *Geometría proyectiva*. Esta bella sistemática ha sido iniciada por *Gergonne* y *Steiner*, quien en el prólogo de la obra antes citada, hace notar cómo la Geometría proyectiva es la que primeramente ha logrado poner orden en el caos de teoremas geométricos, y establecer en ellos una sucesión perfectamente natural.

(\*) Siguiendo la nomenclatura corriente en los tratados españoles diremos en lo sucesivo «principio de correlación» llamando *formas correlativas* las que se ajusten a él. (N. del T.)

Aunque más adelante hemos de hablar en bastantes ocasiones de esta sistematización, adelantaremos por el pronto una idea general de ella. Según el principio de correlación, *el punto y el plano (en el plano, el punto y la recta) pueden sustituirse mutuamente, tanto en los conceptos fundamentales como en los axiomas*; es decir, que cada uno de estos axiomas, y por consiguiente, los teoremas que de ellos se derivan lógicamente, tiene su correlativo. Las llamadas «relaciones métricas», tales como *distancia, ángulo, etc.*, no pueden por el pronto entrar a formar parte de este sistema, pero más adelante veremos cómo puede obviarse esto.

La Geometría proyectiva puede construirse de esta manera:

a) Se toman *tres especies de figuras* como las más simples; a saber: *el punto, la recta (indefinida) y el plano (indefinido)*.

b) Entre estos elementos existen las siguientes relaciones (llamadas *axioma de enlace*), cuya *validez sin excepción*, se logra como más adelante veremos mediante la introducción de elementos impropios (o del infinito).

*Dos puntos determinan una recta; tres puntos que no estén en línea recta, determinan un plano; dos planos determinan una recta; tres planos que no pasen por una misma recta, determinan un punto.*

c) Formemos ahora las *figuras fundamentales lineales* (es decir, las definidas analíticamente por ecuaciones lineales); las cuales son:

A) *Figuras de primera categoría*, que constan de  $\infty^1$  elementos:

$\alpha$ ) El conjunto de los puntos de una recta: *serie rectilínea*.

$\beta$ ) El conjunto de los planos que pasan por una recta: *haz de planos*.

$\gamma$ ) Las rectas de un plano que pasan por un punto: *haz (plano) de rectas*.

B) *Figuras de segunda categoría*, que constan de  $\infty^2$  elementos:

$\alpha$ ) El plano como conjunto de puntos: *campo de puntos*.

$\alpha'$ ) El plano como conjunto de rectas: *campo de rectas*.

$\beta$ ) Los planos que pasan por un punto: *radiación de planos*.

$\beta'$ ) Las rectas que pasan por un punto: *radiación de rectas*.

C) *Figuras de tercera categoría*, que constan de  $\infty^3$  elementos :

- $\alpha$ ) El espacio como conjunto de puntos : *espacio de puntos*.
- $\beta$ ) El espacio como conjunto de planos : *espacio de planos*.

En toda esta construcción aparece, en efecto, con toda claridad, el principio de correlación, y se puede llegar a formar todo el edificio de la Geometría proyectiva, de dos maneras correlativas entre sí : la una partiendo de los puntos, y la otra partiendo de las rectas, si se trata de Geometría plana, o de los planos, cuando se trate de Geometría del espacio.

3) Esta construcción puede también obtenerse haciendo uso del *método analítico* ; para verlo comenzaremos por examinar en qué forma aparece el *principio de dualidad* en los estudios de Plücker.

Es sabido que, en el plano, se puede escribir la *ecuación de una recta*, cuando el término independiente no es nulo, bajo la forma

$$ux + vy + 1 = 0.$$

La recta queda determinada cuando se conocen los valores de los coeficientes  $u$ ,  $v$ , que en esta ecuación intervienen simétricamente, como las coordenadas  $x$  e  $y$ . La idea de Plücker, es la de *considerar  $u$ ,  $v$  como «coordenadas de la recta», análogamente a como  $x$ ,  $y$ , son las coordenadas de un punto, y tomar como variables  $u$ ,  $v$ , en lugar de  $x$ ,  $y$ , cuando se trate de estudiar figuras conjuntos de rectas. En este caso  $x$ ,  $y$ , tienen valores fijos, y la ecuación representa la condición para que una recta variable pase por el punto fijo  $(x, y)$  ; es decir, es la ecuación de *este punto en las nuevas coordenadas* (\*).*

En la expresión anterior, pueden tomarse como variables, arbitrariamente unas u otras de las coordenadas, de modo que la ecuación representa la *condición de «incidencia» del punto y la recta*. El *principio de correlación se funda, pues, en el hecho de que toda ecuación de esta forma, es simétrica respecto a  $u$  y  $v$ , por una parte, y a  $x$  e  $y$  por otra, lo cual lleva en sí, la duali-*

---

(\*) Siguiendo la nomenclatura española, llamaremos *tangenciales* a estas coordenadas.

dad o correlación que existe entre los axiomas de ordenación, según hemos visto.

En el espacio, aparece naturalmente en lugar de la ecuación de la recta, la ecuación del plano.

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

Apoyándose en estas consideraciones, se puede desarrollar analíticamente toda la Geometría, tomando como variables, ya las  $x, y, z$ , o las  $u, v, w$ , con lo cual las palabras punto y plano quedan permutadas entre sí. Esta que pudiéramos llamar doble construcción de la Geometría, suele presentarse en los libros de texto, disponiendo en dos columnas verticales, respectivamente, los diversos teoremas y sus correlativos.

Veamos rápidamente las *figuras de especie superior, correlativas unas de otras*, que así se obtienen, con lo cual habremos logrado ya un cierto avance en el esquema ideal de las figuras lineales.

Supongamos en primer término, que  $x, y, z$ , son funciones  $\varphi, \chi, \psi$ , de un parámetro  $t$ , con lo cual queda definida una *curva alabeada*, que será *plana* en el caso particular de que las funciones  $\varphi, \chi, \psi$ , satisfagan idénticamente a una ecuación lineal con coeficientes constantes, y degenerará en una recta, si se satisfacen a la vez a dos de estas ecuaciones. Análogamente, considerando  $u, v, w$ , como funciones de  $t$ , se obtiene una *sucesión simplemente infinita de planos*, que puede representarse por su *superficie desarrollable*, envolvente. A los dos casos particulares anteriores, corresponden, respectivamente, aquellos en que los planos pasan por un punto, es decir, que envuelven una superficie cónica, y un haz de planos con una recta común.

Si ahora se consideran  $x, y, z$ , como funciones de dos parámetros  $t, t'$ , se obtiene una *superficie* que puede degenerar en un plano y como correlativo, el conjunto doblemente infinito de los planos envolventes de una superficie cuya degeneración es una *radiación de planos*.

Los resultados obtenidos, pueden resumirse en el siguiente cuadro :

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} x = \varphi (t) \\ y = \lambda (t) \\ z = \psi (t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Curva} \\ \text{(curva plana)} \\ \text{(recta)} \end{array} \left| \begin{array}{l} u = \varphi (t) \\ v = \lambda (t) \\ w = \psi (t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Superficie desarrollable} \\ \text{(superficie cónica)} \\ \text{(recta)} \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l} x = \varphi (t, t') \\ y = \lambda (t, t') \\ z = \psi (t, t') \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Superficie} \\ \text{(plano)} \end{array} \left| \begin{array}{l} u = \varphi (t, t') \\ v = \lambda (t, t') \\ w = \psi (t, t') \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Superficie} \\ \text{(punto)} \end{array}
 \end{array}$$

Con este ejemplo, queda suficientemente explicado cómo puede desarrollarse el estudio de las formas correlativas.

4) La consideración de los tres coeficientes de la ecuación del plano como coordenadas del mismo, ha inspirado a Plücker la idea de considerar de una manera completamente general, las constantes de las cuales depende una figura geométrica cualquiera (por ejemplo, los nueve coeficientes de la ecuación de una superficie de segundo orden), como coordenadas de esta figura, e investigar el significado de las ecuaciones que entre tales coordenadas pueden establecerse.

Claro es, que generalizando de este modo, ya no puede hablarse de correlación, pues ésta se basa, según hemos visto, en la propiedad especial que tiene la ecuación del plano (o la de la recta) de ser simétrica respecto de las coordenadas y los coeficientes.

Plücker ha aplicado esta idea general al caso de las rectas del espacio, para lo cual, puestas las dos ecuaciones que la representan en coordenadas puntuales en la forma :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = rz + \rho \\ y = sz + \sigma \end{array} \right.$$

llama coordenadas de la recta en el espacio, a las cuatro constantes  $r, s, \rho, \sigma$ .

Es fácil ver que estas coordenadas están relacionadas íntimamente con las que obteníamos por la aplicación del principio de Grassmann.

Si entre las cuatro coordenadas se establece una ecuación  $f(r, s, \rho, \sigma) = 0$ , quedará separado del conjunto cuádruplemente infinito de rectas otro triplemente infinito, constituido por aquéllas cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación. Este con-

aquellas cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación. Este conjunto ha sido llamado por Plücker *complejo* de rectas. Dos ecuaciones  $f(r, s, \rho, \sigma)=0$ ,  $g(r, s, \rho, \sigma)=0$ , representan una *congruencia de rectas* formada por todas las rectas comunes a los dos complejos  $f=0$ ,  $g=0$ . Por último, si las ecuaciones son tres, el conjunto de rectas es simplemente infinito y constituye una *superficie reglada* (\*).

El principio general de Plücker, o sea, la idea de considerar las constantes de una ecuación como coordenadas de la figura que representa, ha ocasionado interesantes estudios, entre los cuales descuellan los del gran matemático noruego *Sophus Lie*, cuya *Geometría esférica* está basada en la consideración de la esfera como elemento de espacio, dependiente, como la recta, de cuatro parámetros. También es digno de mencionar el moderno libro de Study «*Geometrie der Dynamen*» (\*\*), en el cual, el concepto de torsor que aquí hemos admitido, da lugar a una serie de notables investigaciones.

• C) Junto a esta «Geometría moderna», basada en la consideración de la recta y del plano ilimitados como elementos de espacio, *Grassmann* ha desarrollado otra, en la cual se concede primordial importancia a los *elementos de recta, plano y espacio limitados*, asignándoles coordenadas, con arreglo al *principio de los determinantes*. Este método de estudio tiene a su favor la ventaja de haber satisfecho en mucho más alto grado las necesidades de la Física y de la Mecánica, que la Geometría de la recta y el principio de correlación.

Naturalmente, estas líneas directrices no están tan profundamente separadas como lo que podría deducirse de lo que llevamos dicho. Lo que realmente ocurre es que Plücker se apoya *más* en la recta indefinida, y *Grassmann más* en el elemento de recta, mientras que los demás consideran indistintamente una y otra figura. En particular, las consideraciones de Study lo mismo pueden ligarse a uno que a otro. Agrueguemos que

---

(\*) Estas ideas están desarrolladas en la obra «*Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*» de Plücker (1868-9) que murió al terminar de imprimirse la primera parte, correspondiente a Klein como su asistente que era, el honor de dirigir la edición de la segunda.

(\*\*) Leipzig, 1903.

Grassmann no se ha limitado a estudiar propiedades susceptibles de aplicación inmediata, sino que, por el contrario, su actividad creadora se ha ejercitado también en el terreno puramente abstracto. Lo más importante es haber considerado *en coordenadas puntuales*  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en lugar de las tres  $x, y, z$ , y así llegar a la *Geometría del espacio*  $E_n$  de  $n$  dimensiones, cuyo verdadero creador ha sido Grassmann.

Siguiendo su principio general, consideraba en uno de estos espacios multidimensionales las matrices formadas por las coordenadas de 2, 3, ...,  $n+1$  puntos, y los determinantes menores de esta matriz dan entonces una serie de figuras, correspondientes a los elementos de recta y de plano. La disciplina abstracta así construída es como ya hemos dicho, lo que Grassmann designó con el nombre de teoría de la extensión (*Ausdehnungslehre*).

Modernamente, el concepto de espacio multidimensional, se ha generalizado todavía más con la admisión de *infinitas coordenadas*  $x_1, x_2, \dots$ , lo que da lugar a un *espacio de infinitas dimensiones*  $E_\infty$ . Este concepto no carece de sentido, pues un punto de tal espacio puede considerarse como la representación geométrica de una serie de potencias, que para estar determinada, precisa que se conozcan sus infinitos coeficientes.

Es digno de notar en esto, y así se reconoce hoy por todos los matemáticos, que este lenguaje geométrico en el caso de  $n$  y aun en el de infinitas variables, ofrece una utilidad real; con él los razonamientos tienen mayor vida que cuando se mantienen en el terreno analítico abstracto, y llegan a utilizarse tales nuevos conceptos geométricos, como si los espacios  $E_n$  ó  $E_\infty$  nos fuesen familiares.

La adopción de los espacios de más de tres dimensiones, no quiere decir, desde luego, que se presuponga la posibilidad de su existencia real. Este es un problema que sólo a los psicólogos o filósofos toca resolver.

Con el fin de contribuir a una mejor orientación para ver el papel de la Matemática en la cultura general, diremos algo acerca de la significación que esta Geometría multidimensional tenía para el astrónomo de Leipzig Zöllner, en 1873. Es éste uno de esos casos raros en que un lenguaje matemático pasa a ser

de dominio común ; actualmente, ya cualquiera, no matemático, habla corrientemente de la «cuarta dimensión». Esta popularidad de la «cuarta dimensión», proviene de los experimentos con que un espiritista, llamado Slate, embaucó a Zöllner. Se presentaba Slate como un medium que estaba en comunicación directa con los espíritus y conducido por ellos hacía desaparecer de la vista del público algunos objetos, que luego hacía reaparecer. Zöllner creía en estos experimentos y los explicaba mediante una teoría físico-metafísica, que fué muy extendida ; admitiendo que el medium estaba dotado de una sensibilidad especial que le permitía apreciar en el espacio de cuatro dimensiones, lo cual aprovechaba para hacer invisible un objeto cualquiera, haciéndole pasar a la cuarta dimensión, inaccesible para los demás mortales.

Esta explicación, que a primera vista parece oscura, se comprende fácilmente imaginando un animal que viviera en una superficie, y no pudiera percibir nada fuera del campo bidimensional en que vive ; por ejemplo, un animal parecido al ácaro.

Si utilizando la tercera dimensión de nuestro espacio intuitivo, retiramos de la superficie un objeto que esté colocado sobre ella, no cabe duda que dejará de existir para el animal en cuestión, exactamente como en los experimentos de que habla Zöllner.

La existencia de seres bidimensionales ha sido supuesta por el autor anónimo de una novelita inglesa «*Flatland*» y en la cual se describe un mundo de dos dimensiones. Los diversos seres se distinguen entre sí únicamente por su forma geométrica, tanto más complicada cuanto más alto es su grado de organización. Así, los seres superiores son polígonos regulares ; en cuanto a las mujeres, de las cuales el autor parece tener un concepto muy mezquino, se reducen a la figura de un simple trazo (\*).

No es preciso decir que el concepto matemático de la Geometría de más de tres dimensiones, no tiene relación alguna con

---

(\*) La novela se titula *A romance of many dimensions*. By a Square. London 1884. El autor persigue principalmente el objeto de hacer comprender la posibilidad de una Geometría multidimensional.

las consideraciones metafísicas de Zöllner. La Matemática aparece aquí como *ciencia normativa pura*, empleando un lenguaje moderno, que se limita a estudiar las relaciones formales posibles entre objetos, con independencia absoluta de su realidad natural o metafísica.

Dejando ya estas digresiones, vamos a tratar con algún detalle las figuras de carácter superior, que pueden considerarse producidas por las formas elementales de Grassmann—en particular por los vectores—, y análogas a las formadas por puntos, planos, etc. El estudio de estas formas, se denomina *Análisis vectorial*, y ha sido convertido por *Hamilton* en un valioso instrumento auxiliar de la Física y de la Mecánica. Las obras más importantes dedicadas a este estudio son: la de *Hamilton*, titulada «*Elementos de los Cuaternos*», y el «*Análisis Vectorial*», del americano *J. W. Gibbs*, antes citado.

La base de estas investigaciones consiste en partir de los conceptos de vector y escalar ya conocidos por nosotros y asociar *estas magnitudes a los puntos del espacio*. A cada punto  $(x, y, z)$ , se le asocia un escalar

$$S = f(x, y, z)$$

y se dice entonces que se tiene un *campo escalar*, y cuando a cada punto se le une un vector determinado

$$X = \varphi(x, y, z), \quad Y = \psi(x, y, z), \quad Z = \chi(x, y, z),$$

el conjunto de estos vectores recibe el nombre de *campo vectorial*.

Estas denominaciones designan los conceptos geométricos más importantes usados en la Física moderna. Así por ejemplo, la densidad de una *distribución de masas*, la *temperatura* y la *energía potencial* de un sistema continuo, consideradas como funciones del lugar, son ejemplos de campos escalares.

El *campo de fuerzas*, en el que a cada punto se asigna una fuerza determinada, es el ejemplo típico de un campo vectorial. Otros ejemplos son: en la *teoría de la elasticidad*, el *campo de los corrimientos* de un campo deformable, cuando a cada punto se le hace corresponder el segmento de su corrimiento; análo-

gamente en la Hidrodinámica, el *campo de velocidades*, y finalmente, en la Electrodinámica, el *campo eléctrico y el magnético*, en los que a cada punto se hace corresponder un vector eléctrico y uno magnético determinado. Como para cada punto, el vector de la intensidad magnética del campo, que es de naturaleza axial, puede componerse con el vector polar de la intensidad eléctrica del campo, produciendo una helicoidal, el campo electromagnético puede presentarse también como ejemplo de un *campo helicoidal*.

Hamilton ha mostrado cómo pueden aplicarse a este campo, de manera sencillísima, los métodos del Cálculo diferencial e integral.

Para ello, es fundamental la observación de que las diferenciales  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , cuyas razones determinan una dirección para el movimiento de un punto, representan un *vector libre*, es decir, que se comportan como componentes de un *vector libre en las transformaciones de coordenadas*. Esto se deduce fácilmente, sin más que ver que pueden obtenerse por medio de un paso al límite, de las coordenadas de un pequeño segmento que pase por el punto  $(x, y, z)$ .

Más importante, pero también más difícil de comprender, es la segunda observación, de que los símbolos de las derivadas parciales  $\frac{\partial}{\partial x'}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y'}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z'}$ , tienen también el carácter de *componentes vectoriales*, es decir, que al pasar a un nuevo sistema de coordenadas rectangulares  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ , los nuevos símbolos  $\frac{\partial}{\partial x'}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y'}$ ,  $\frac{\partial}{\partial z'}$ , se deducen de los antiguos como las coordenadas transformadas de un vector (más precisamente de un vector *polar*).

Esto se ve en seguida, efectuando el cálculo correspondiente a una rotación del sistema de coordenadas:

$$\left. \begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Estas fórmulas del giro tienen la propiedad característica, según hemos visto anteriormente, de resolverse permutando en-

tre sí las filas y columnas de los coeficientes del sistema, con lo cual resulta:

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z' \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z' \\ z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Si consideráramos ahora una función cualquiera de  $x, y, z$ , puede expresarse como función de  $x', y', z'$ , por medio de la transformación (2), y aplicando las conocidas reglas de la derivación parcial, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial z'} \end{aligned}$$

y sustituyendo en éstas, las derivadas de  $x, y, z$ , respecto a  $x', y', z'$ , sacadas de las (2), resulta finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= a_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_1 \frac{\partial}{\partial y} + c_1 \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + c_2 \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= a_3 \frac{\partial}{\partial x} + b_3 \frac{\partial}{\partial y} + c_3 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Comparando estas fórmulas con las (1), se observa la coincidencia con las fórmulas de transformación de las coordenadas de los puntos.

Un sencillo cálculo demuestra asimismo que aplicando una *traslación* al sistema coordenado, los símbolos  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  no cambian y que si la transformación es una *inversión* del sistema, varía únicamente su signo, con lo cual queda terminada la demostración.

La única transformación que aún no hemos aplicado es la del *cambio de unidad*. Efectuándola se obtiene como resultado, que dichos símbolos tienen la dimensión  $-1$ , puesto que las derivadas de las coordenadas aparecen en el denominador.

Vamos ahora a aplicar este símbolo vectorial de Hamilton  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  las mismas operaciones que efectuábamos con los vectores. Convendremos en representar simbólicamente el resultado de aplicar la operación  $\frac{\partial}{\partial x}$  a una función  $f(x, y, z)$ , o sea  $\frac{\partial f}{\partial x}$ , por el *producto*  $f \cdot \frac{\partial}{\partial x}$  de  $\frac{\partial}{\partial x}$  y  $f$ . Este convenio está autorizado para cuanto sigue, por las leyes formales de la multiplicación y especialmente por la distributiva, según la cual,

$$\frac{\partial (f + g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}$$

Sea un *campo escalar*  $S=f(x, y, z)$ . Multipliquemos (en el sentido del convenio precedente), este campo, por las componentes de un vector de Hamilton, es decir, formemos el vector:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

Como ya hemos visto en otro lugar (pág. 68), el producto de un escalar por un vector, es otro vector y como en la demostración de este teorema sólo se aplican las propiedades de la multiplicación que subsisten en nuestra multiplicación simbólica, resulta que las *tres derivadas parciales del campo escalar, definen un vector dependiente del punto x, y, z; es decir, un campo vectorial, el cual está relacionado con el escalar, de un modo independiente del sistema de coordenadas.*

Este campo vectorial considerado con signo negativo, se designa con el nombre de *gradiente del campo escalar*. Este nombre procede de la Meteorología, en la cual se considera el conjunto de las presiones atmosféricas en los diversos puntos, como un campo escalar, que se representa gráficamente por las curvas  $S=\text{constante}$ . El gradiente es constantemente normal a estas curvas y da la dirección de los cambios más rápidos de presión.

Con los tres componentes  $X, Y, Z$ , de un vector, se puede formar siempre un escalar  $X^2 + Y^2 + Z^2$ . Según esto, del gradiente de un escalar puede deducirse un *nuevo campo escalar*:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2$$

que está relacionado, tanto con el gradiente, como con el primitivo campo, de un modo independiente del sistema de coordenadas. Este escalar es igual al *cuadrado de la longitud del gradiente*, o, como suele también decirse, al *cuadrado de la pendiente del campo escalar*  $f$ .

Como aplicación del teorema anterior, formemos con el símbolo vectorial  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  un escalar simbólico, multiplicando cada una de las componentes por sí misma, lo que equivale a la *operación*:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

que, *por consiguiente, tiene carácter escalar*, es decir, es invariante en todas las transformaciones de coordenadas. «Multiplicando» ahora este símbolo escalar por un campo escalar  $f$ , resulta el nuevo *campo escalar*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

relacionado con el primero de un modo independiente del sistema de coordenadas. Si imaginamos un líquido que fluye en el campo, cuya densidad inicial es 1 y cuya velocidad en cada punto está dada por el gradiente de  $f$ , en el primer momento  $dt$ , la densidad del fluido aumenta en cada punto en una cantidad igual al producto de aquel escalar por  $dt$ . Por esta razón se ha dado el nombre de *divergencia del gradiente de  $f$* , al valor

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

Las denominaciones de Lamé que llamaba *función de punto*, al campo escalar  $S=f(x, y, z)$ , y *primero y segundo parámetro diferencial* a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

respectivamente, se han empleado también mucho.

Sea ahora, un vector  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$  y multipliquémosle por un *campo vectorial (polar)*:

$$X=\varphi(x, y, z), \quad Y=X(x, y, z), \quad Z=\psi(x, y, z)$$

de las dos maneras que puede hacerse.

a) Por *multiplicación interior*, resulta

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

que, naturalmente, depende de  $x, y, z$ , y es, por tanto, un campo escalar que recibe el nombre de *divergencia* del vectorial, y está ligado a éste por relaciones independientes del sistema de coordenadas.

b) La *multiplicación externa*, produce la matriz rectangular:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

cuyos tres determinantes,

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

definen un *vector axial*, que se designa con el nombre de *rotor* y también con el de *curl*, dado por Maxwell. Lo mismo que antes, las relaciones entre ambos campos no dependen del sistema de coordenadas.

Hemos obtenido así, por medio de métodos *sistemáticamente geométricos*, todas las magnitudes que utilizan los físicos en sus investigaciones acerca de los diferentes campos vectoriales;

se trata, pues, de *Geometría pura*. Si hacemos esta observación, es porque, aparentemente, los conceptos que hemos estudiado se refieren más bien a la Física que la Matemática, y además suelen encontrarse expuestos en los libros dedicados a la primera de estas ciencias, y no en los matemáticos. La única razón para ello es de índole histórica y consiste en que la Física ha necesitado crearse por sí misma un instrumento adecuado, ya que no existía dentro de la Matemática.

Hay aquí el mismo equívoco que señalábamos en el Análisis. En el curso del tiempo, la Física ha experimentado necesidades matemáticas que casi siempre han constituido un gran estímulo para la ciencia matemática y, sin embargo, la enseñanza de la Matemática elemental parece no tener nada que ver con ello. Se mueve sobre los mismos carriles que hace siglos y deja que la Física se forme trabajosamente sus medios auxiliares, aunque la preparación matemática para el cultivo de la Física sería materia más propia de la enseñanza matemática que la que frecuentemente utiliza. Y es que, aun en la esfera espiritual, hay ley de inercia; cuanto signifique salirse de caminos trillados para emprender otros nuevos, encuentra siempre una gran resistencia.